

Raport științific

privind implementarea proiectului PN-II-ID-PCE-2011-3-0118

în perioada ianuarie – decembrie 2012

În această perioadă au fost elaborate 4 articole științifice, trei dintre acestea fiind publicate sau acceptate spre publicare în reviste cotate ISI, iar unul este trimis spre evaluare pentru o posibilă publicare. Conținutul celor patru articole, ce acoperă în totalitate obiectivele propuse pentru aceasta etapă, poate fi sintetizat după cum urmează:

1. L. Ornea, M. Verbitsky, V. Vuletescu, *Blow-ups of Locally Conformally Kähler Manifolds*, International Mathematics Research Notices (2012), doi:10.1093/imrn/rns128.

Varietățile local conform Kähler (pe scurt LCK) sunt varietăți complexe acoperite de varietăți Kähler față de a căror metrică grupul transformărilor de acoperire acționează prin omotetii olomorfe. Se știa că eclatarea varietăților LCK în puncte admite metrici LCK (Tricerri 1982, Vuletescu 2009). În articolul de față am studiat existența metricilor LCK pe eclătările de-a lungul unor subvarietăți de dimensiune cel puțin 1 în varietăți LCK compacte. Am găsit că, spre deosebire de cazul Kähler, în care spațiul eclatat admite întotdeauna metrici Kähler, eclătările de varietăți LCK admit metrici LCK dacă și numai dacă subvarietatea are o structură Kähler indusă. În particular, eclătările de varietăți Vaisman compacte nu pot admite metrici LCK, ceea ce furnizează exemple de varietăți complexe compacte care nu admit metrici LCK (observația este importantă pentru că nu există obstrucții topologice la existența metricilor LCK). O altă consecință importantă a demonstrației este faptul că pe spațiile de twistori nu există metrici LCK care să nu fie Kähler. Cum spațiile de twistori care admit metrici Kähler sunt cunoscute, și acest corolar oferă exemple, în dimensiune complexă cel puțin 3, de varietăți complexe compacte care nu admit metrici LCK.

2. G.E. Vilcu, *Ruled CR-submanifolds of locally conformal Kähler manifolds*, Journal of Geometry and Physics, 62 (6) (2012), 1366-1372.

Conceptul de CR-subvarietate, introdus pentru prima oară de A. Bejancu în geometria Kähleriană, a fost ulterior extins și în ambient LCK. O astfel de subvarietate admite în mod natural anumite foliații canonice, studiate de Chen și Piccinni (1985). Una dintre aceste foliații, notată F^\perp și numită foliația total reală, este dată de distribuția total reală implicată în definiția CR-subvarietății, despre care s-a demonstrat că este complet integrabilă (Blair și

Chen, 1979). În această lucrare s-a investigat relația dintre geometria foliației total reale și geometria subvarietății, cu accent pe legăturile dintre foliație și structura LCK a ambientului. În particular, au fost obținute condiții necesare și suficiente pentru ca o CR-subvarietate a unei varietăți LCK să fie riglată în raport cu foliația total reală F^\perp , respectiv ca această foliație să fie Riemanniană.

3. M. Vișinescu, G.E. Vilcu, *Hidden symmetries of Euclideanised Kerr-NUT-(A)dS metrics in certain scaling limits*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), 8 (2012), 058, 15 pages.

Unul dintre conceptele fundamentale în fizică este acela de simetrie, teorema lui Noether dând o corespondență între simetrii și mărimile conservate. Pentru mișcările geodezice într-un spațiu-timp, mărimile conservate în mod uzual sunt corelate cu izometriile care corespund vectorilor Killing. Uneori un spațiu-timp poate admite simetrii de ordin superior descrise de tensorii Killing simetrici, numiți tensori Stäckel-Killing (S-K). Aceste simetrii sunt cunoscute ca *simetrii ascunse*, exemplul uzual fiind furnizat de vectorul Runge-Lenz în problema Kepler/Coulomb. Mărimile conservate corespunzătoare sunt pătratice sau, mai general, polinomiale în raport cu momentul. Existența lor garantează integrabilitatea mișcărilor geodezice și este în mod fundamental legată de separabilitatea ecuației Hamilton-Jacobi și Klein-Gordon la nivel cuantic. Următoarele obiecte simple ce pot fi studiate în legătură cu simetriile unei varietăți, după tensorii S-K sunt tensorii Killing-Yano (K-Y), cunoscuți în literatura de specialitate și sub numele de forme Killing sau tensori Yano, aceștia fiind corelați cu supersimetriile nestandard. Scopul principal al acestei lucrări a fost de a identifica două noi forme Killing pe spații Einstein-Sasaki obținute din metrici *Kerr-NUT-(A)dS* în anumite condiții de trecere la limită. Acest rezultat va permite, via o teoremă a lui Semmelmann (2003), o descriere completă a mulțimii tuturor formelor Killing pe astfel de spații.

4. C. Gherghe, *Harmonic maps and stability on locally conformal Kähler manifolds* (articol trimis spre evaluare la o revistă cotate ISI).

Aplicațiile armonice sunt puncte critice ale funcționalei energie. Studiul aplicațiilor armonice are numeroase aplicații. Există numeroase rezultate interesante privind aplicațiile armonice pe varietăți Kähler, dar acestea au fost studiate destul de puțin pe varietăți local conform Kähler. Teoria aplicațiilor armonice pe varietăți dotate cu structuri geometrice suplimentare își are originea într-un articol al lui Lichnerowicz care a arătat că o aplicație armonică între două varietăți Kähler compacte este nu numai armonică, dar și minim (în

clasa sa de omotopie) al funcționalei energie. Ianuș, Ornea și Vuletescu (1995) au găsit o condiție suficientă ca o aplicație olomorvă de la o varietate local conform Kähler la o varietate Kähler să fie armonică. În rezultatul principal al articolului se arată că o aplicație olomorvă armonică de la o varietate local conform Kähler la o varietate Kähler este slab-stabilă. Se reobține într-o altă manieră și rezultatul lui Ianuș, Ornea și Vuletescu. Se arată de asemenea că o aplicație pluriarmonică de la o varietate local conform Kähler la o varietate Kähler trebuie să fie constantă.

Este de remarcat de asemenea că diseminarea rezultatelor din activitatea desfășurată în cadrul proiectului în această etapă s-a materializat nu doar prin publicarea de articole, ci și prin participarea cu diverse lucrări la conferințe naționale și internaționale. Astfel, G.E. Vîlcu a participat cu expunerile: *Foliated CR-submanifolds* la *The International Conference on Applied Analysis and Algebra, June 20–24, 2012, Istanbul*, respectiv *Canonical foliations on Cauchy Riemann submanifolds* la *The International Conference on Complex Analysis and Related Topics, The 13th Romanian-Finnish Seminar, June 26-30, 2012, Ploiești*, și cu posterul *Semi-Riemannian submersions from manifolds endowed metric mixed 3-structures* la *6th European Congress of Mathematics, July 2-7, 2012, Krakow*. C. Gherghe a prezentat lucrarea *Aplicații armonice pe varietăți local conform Kähler* la *A XVI-a Conferință Anuală a Societății de Științe Matematice din România*, 19-20 octombrie 2012, Ploiești. Liviu Ornea a făcut expuneri cu titlul *Blow ups and submersions of locally conformally Kaehler manifolds* în seminariile de geometrie ale Universităților: „La Sapienza” din Roma, Hamburg, Marburg, Koeln și în Oberseminarul Institutului „Max Planck” din Bonn. De asemenea, Victor Vuletescu va realiza la începutul lunii decembrie expunerea cu titlul *Number fields in locally conformal geometry* în ciclul de conferințe *Mathematische Gesellschaft* al Universității din Göttingen.

Director proiect,
Prof. dr. Liviu Ornea