# SINTEZA LUCRARII TE_46, NR. 83/2010, ANUL 2011

MARIUS VLADOIU

## INTRODUCERE

In cele ce urmeaza prezentam detaliat rezultatele principale obtinute in lucrarile [20], [2], [3], care sunt postate deja pe site-ul de preprinturi electronice arXiv.org, si au fost si submise la jurnale cotate ISI. In a doua parte vom prezenta pe scurt rezultatele obtinute in doua lucrari [22], [12] care urmeaza a fi submise in decembrie 2011. Dorim sa mentionam ca pentru acest an am avut prevazute realizarea unui articol care sa fie trimis spre publicare si aparitia unui articol (vezi [21]), dar dupa cum se poate vedea in continuare am depasit acest numar.

## 1. REZULTATE STIINTIFICE PRINCIPALE

**1.** In articolul "The stable set of associated prime ideals of a polymatroidal ideal" [20], al carui co-autor este Marius Vladoiu, sunt studiate idealele prime asociate puterilor idealelor polimatroidale, inclusiv multimea "stabila" a primelor asociate. Se arata ca idealele polimatroidale au proprietatea de persistenta, iar pentru idealele corespunzatoare polimatroizilor transversali si polimatroizilor de tip Veronese este detereminat explicit indexul de stabilitate, precum si multimea primelor asociate.

Prezentam in cele ce urmeaza, pe larg, rezultatele obtinute. Fie $I$ un ideal intr-un inel noetherian $R$. Se noteaza cu $\mathrm{Ass}(I)$ multimea idealelor prime asociate lui $R/I$. Brodmann a aratat ca $\mathrm{Ass}(I^k) = \mathrm{Ass}(I^{k+1})$ pentru toti $k \gg 0$. Cel mai mic numar $k_0$ pentru care are loc egalitatea se numeste *indexul de stabilitate*, iar $\mathrm{Ass}(I^{k_0})$ se numeste *multimea stabila a idealelor prime asociate* ale lui $I$. Ea se noteaza cu $\mathrm{Ass}^\infty(I)$. Cateva probleme deschise apar in legatura cu teorema lui Brodmann.

(1) Exista o margine superioara pentru indexul de stabilitate, care depinde doar de $R$?

(2) Ce poate fi spus despre $\mathrm{Ass}^\infty(I)$? Poate fi calculata $\mathrm{Ass}^\infty(I)$ in cazul in care $R$ este un inel de polinoame si $I$ este un ideal graduat?

(3) Este adevarat ca $\mathrm{Ass}(I) \subset \mathrm{Ass}(I^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Ass}(I^k) \subset \ldots$?

Toate aceste intrebari sunt larg deschise, chiar si pentru ideale monomiale, cu toate ca in cateva cazuri speciale interesante, incluzand "edge ideals" si "vertex cover ideals", aceste intrebari au fost lamurite aproape in totalitate. Un ideal $I$ pentru care (3) are loc se spune ca satisface *proprietatea de persistenta*.

Presupunem ca $(R,m)$ este inel local sau $K$-algebra standard graduata avand idealul maximal graduat $m$. Spunem ca idealul $I \subset R$ are *functii depth descrescatoare*, daca pentru toate idealele prime $P$ din suportul $V(I)$ al lui $R/I$, avem ca $\operatorname{depth} R_P/I^kR_P$ este o functie descrescatoare de $k$, iar $I$ se spune ca are *functii depth strict descrescatoare*, daca functiile depth ale tuturor localizatelor sunt strict descrescatoare pana cand ating valoarea limita. In cazul in care $I$ este ideal graduat, respectiv un ideal monomial, impunem definitia proprietatii de functii depth descrescatoare (respectiv strict descrescatoare) doar pentru idealele prime $P \in V^*(I)$, unde $V^*(I)$ denota multimea idealelor graduate, respectiv monomiale care il contin pe $I$. Este usor de observat ca orice ideal care are functii depth descrescatoare satisface proprietatea de persistenta. Nu se cunosc momentan exemple de ideale monomiale libere de patrate care sa nu aiba functii depth descrescatoare.

Exista un caz in care $\mathrm{Ass}^\infty(I)$ poate fi calculat explicit. Mai exact, daca $I$ este un ideal monomial intr-un inel de polinoame $S=K[x_1,\dots,x_n]$ a carui algebra Rees $\mathscr{R}(I)$ este Cohen-Macaulay. Folosind un rezultat de-al lui Huneke rezulta ca inelul graduat asociat lui $I$ este Cohen–Macaulay, si deci $\lim_k \operatorname{depth} S/I^k = n-\ell(I)$, unde $\ell(I)$ denota "analytic spread"-ul lui $I$, adica, dimensiunea Krull a inelului fibra $\mathscr{R}(I)/m\mathscr{R}(I)$, a se vedea Eisenbud si Huneke [17, Proposition 3.3]. Aceasta teorema ne permite sa identificam elementele lui $\mathrm{Ass}^\infty(I)$ in functie de matricea exponentilor asociata multimii minimale unice $G(I)$ de generatori ai lui $I$. In Sectiunea 1 a articolului sunt discutate si explicate in detaliu tehnicile necesare in demonstrarea teoremelor principale. In Sectiunea 2 strategiile discutate sunt aplicate pentru studiul idealelor prime asociate puterilor idealelor polimatroidale. Ca prim rezultat important obtinem in Propozitia 2.3, ca idealele polimatroidale au proprietatea de persistenta. Folosindu-ne de de rezultatul lui Huneke-Eisenbud, "limit depth"-ul unui ideal polimatroidal poate fi exprimat in functie de "analytic spread"-ul sau.

In celelalte doua sectiuni consideram clase speciale de ideale polimatroidale, pentru care intrebarile formulate anterior au raspunsuri complete. Idealele considerate in Sectiunea 3 sunt ideale polimatroidale asociate polimatroizilor transversali. Din punct de vedere algebric, aceste ideale sunt produse finite de ideale prime monomiale. Conca si Herzog au reusit sa gaseasca o descompunere primara pentru astfel de ideale, insa descompunerea data de ei nu este iredundanta. Primul rezultat al Sectiunii 3 (Lema 3.1) afirma ca prezentarea unui ideal polimatroidal transversal ca produs de ideale monomiale prime este unica. Rezultatul esential al acestei sectiuni este Teorema 3.3, in care se arata ca ideal graduat maximal $m$ este asociat idealului polimatroidal $I=P_{F_1}\cdots P_{F_r}$ daca si numai daca $\bigcup_{i=1}^r F_i=[n]$ si graful asociat $G_I$ este conex. Aici $G_I$, graful asociat idealului $I$, este graful care are ca varfuri multimea $\{1,\dots,r\}$, iar $\{i,j\}$ este o muchi a lui $G_I$ daca si numai daca $F_i\bigcap F_j\neq\emptyset$. Folosind acest rezultat obtinem in Corolarul 3.6 ca $\mathrm{Ass}(I)=\mathrm{Ass}^\infty(I)$ pentru orice ideal polimatroidal transversal. Mai mult aratam in Teorema 3.7 ca $\mathrm{Ass}(I)$ este determinat de arborii grafului $G_I$. O consecinta a acestei teoreme este clasificarea in Corolarul 3.9 a tuturor submultimilor $\mathscr{S}=\{F_1,\dots,F_r\}$ ale lui $2^{[n]}$ pentru care exista un ideal polimatroidal transversal $I$ cu $\mathrm{Ass}(I)=\{P_{F_1},\dots,P_{F_r}\}$, iar in Corolarul 3.10 construim o descompunere primara iredundanta pentru toate puterile $I^k$ ale lui $I$. Incheiem aceasta sectiune cu 2 rezultate privind depth-ul lui $S/I$. In Teorema 3.12 aratam ca $\operatorname{depth} S/I$ este determinat de numarul de componente conexe ale grafului $G_I$, iar in Corolarul 3.14 obtinem $\mathrm{dstab}(I)=1$.

Cazul idealelor $I_{d;a_1,\dots,a_n}$ de tip Veronese, adica clasa de ideale polimatroidale considerate in Sectiunea 4, este complet diferita. In acest caz $\mathrm{Ass}^\infty(I)=V^*(I)$, dupa cum este aratat in Propozitia 4.3, iar invariantul $\mathrm{astab}(I)$ poate fi orice numar intre 1 si $n-1$, determinat in mod explicit de o formula data in functie de numerele $d$ si $a_1,\dots,a_n$, vezi Corolarul 4.6. Mai mult aratam in Corolarul 4.7 ca $\mathrm{astab}(I)=\mathrm{dstab}(I)$, $\lim_{k\to\infty}\operatorname{depth} S/I^k$ si $\ell(I)$ sunt calculate pentru orice ideal de tip Veronese. Trasatura comuna idealelor polimatroidale transversale si idealelor de tip Veronese este $\mathrm{astab}(I)=\mathrm{dstab}(I)$.

**2.** In lucrarea "A Schreier domain type condition" [2], avandu-l coautor pe Mihai Epure se studiaza domeniile de integritate $D$ unde este verificata urmatoarea conditie: daca $I\supset AB$ cu $I,A,B$ ideale nenule ale domeniului, atunci exista doua ideale nenule $H$ si $J$ astfel incat $I=HJ$, unde $H\supset A$ si $J\supset B$. Notiunea de domeniu Schreier a fost introdusa de Cohn. Un domeniu $D$ se numeste *domeniu Schreier* daca (1) $D$ este intreg inchis si (2) pentru orice ideale principale $I,J_1,J_2$ ale lui $D$ care indeplinesc conditia $I\supseteq J_1J_2$ avem $I=I_1I_2$ pentru niste ideale principale $I_1,I_2$ ale lui $D$ cu $I_i\supseteq J_i$ pentru $i=1,2$. Un domeniu se numeste *pre-Schreier* daca satisface conditia (2) de mai sus. Mai tarziu, generalizari ale conceptului de domeniu "(pre)-Schreier" au fost studiate in [6], [13] si [1].

In [2] am studiat o clasa de domenii care satisfac o conditie de tip Schreier dar impusa pentru toate idealele nenule. Mai precis, un domeniu $D$ se numeste *sharp* daca pentru orice ideale nenule $I$, $A$, $B$ ale lui $D$ cu proprietatea ca $I \supseteq AB$ exista idealele $A' \supseteq A$ si $B' \supseteq B$ astfel incat $I = A'B'$. In cele ce urmeaza, sunt mentionate principalele rezultate din [2]. Daca domeniul $D$ este Noetherian sau Krull atunci $D$ este sharp daca si numai daca $D$ este domeniu Dedekind [2, Corollaries 2 and 12]. Un domeniu sharp este pseudo-Dedekind; in particular, un domeniu sharp este complet intreg inchis si GGCD [2, Proposition 4]. Reamintim ca un domeniu $D$ se numeste *pseudo-Dedekind* (cateodata mai este numit si *domeniu Dedekind generalizat*) daca $v$-inchiderea fiecarui ideal nenul al lui $D$ este inversabil. De asemenea, un domeniu $D$ se numeste *generalizat GCD (GGCD )* daca $v$-inchiderea fiecarui ideal finit generat si nenul al lui $D$ este inversabila. Definitia $v$-inchiderii este reamintita mai jos. In [2, Proposition 7] se demonstreaza ca orice inel de fractii al unui domeniu sharp este inca domeniu sharp si se foloseste acest rezultat pentru a demonstra prin [2, Example 8] ca nu orice domeniu pseudo-Dedekind este sharp. De aceea, am furnizat o caracterizare a domeniilor sharp printre cele pseudo-Dedekind [2, Proposition 5]. Un domeniu de valuare este sharp daca si numai daca grupul valuarii lui $D$ este un subgrup complet al grupului aditiv al numerelor reale [2, Proposition 6]. Localizarile unui domeniu sharp in idealele maximale sunt domenii de valuare cu grupul valuarii un subgrup complet al grupului aditiv al numerelor reale ; in particular, un domeniu sharp este Prüfer de dimensiune cel mult 1 [2, Theorem 11]. Reciproca este adevarata pentru domenii de caracter finit [2, Theorem 15], dar falsa in cazul general [2, Example 13] (reamintim ca *un domeniu de caracter finit* este un domeniu unde elementele nenule sunt continute doar intr-un numar finit de ideale maximale). Orice domeniu sharp numarabil se demonstreaza ca este Dedekind, vezi [2, Corollary 17].

**3.** Scopul celui de-al doilea articol "A Schreyer domain type condition II" [3], al carui coautor este Mihai Epure, este de a studia conceptul de domeniu sharp in contextul star operatiilor. Pentru a facilita trecerea in revista a rezultatelor din articol, in cele ce urmeaza, sunt prezentate definitii si proprietati elementare ale $*$-operatiilor. Fie $D$ un domeniu cu corpul de fractii $K$ si fie $F(D)$ multimea idealelor fractionare nenule ale lui $D$. O functie $A \mapsto A^* : F(D) \to F(D)$ se numeste *star operatie* pe $D$ daca $*$ satisface urmatoarele 3 conditii pentru orice $0 \neq a \in K$ si orice $I, J \in F(D)$:

(1) $D^* = D$ si $(aI)^* = aI^*$,

(2) $I \subseteq I^*$ si daca $I \subseteq J$, atunci $I^* \subseteq J^*$,

(3) $(I^*)^* = I^*$.

Un ideal $I \in F(D)$ se numeste $*$-ideal daca $I = I^*$. Pentru orice $I, J \in F(D)$, avem $(IJ)^* = (I^*J)^* = (I^*J^*)^*$. Aceste relatii definesc asa numita *$*$-multiplicare.* Daca $\{I_\alpha\}$ este o submultime a lui $F(D)$ astfel incat $\cap I_\alpha \neq 0$, atunci $\cap I_\alpha^*$ este un $*$-ideal. De asemenea, daca $\{I_\alpha\}$ este o submultime a lui $F(D)$ astfel incat $\sum I_\alpha$ este un ideal fractionar, atunci $(\sum I_\alpha)^* = (\sum I_\alpha^*)^*$. Star operatia $*$ se numeste *stabila* daca $(I \cap J)^* = I^* \cap J^*$ pentru orice $I, J \in F(D)$. Daca $*$ este o star operatie, functia $*_f : F(D) \to F(D)$ definita prin $I^{*_f} = \cup_H H^*$, unde $H$ parcurge multimea tuturor subidealelor finit generate si nenule ale lui $I$, este de asemenea o star operatie. Star operatia $*$ se numeste de *caracter finit* daca $* = *_f$. Evident $(*_f)_f = *_f$. Se noteaza prin $Max_*(D)$ multimea tuturor $*$-idealelor maximale, adica, idealele maximale printre $*$-idealele proprii intregi ale lui $D$. Orice $*$-ideal maximal este un ideal prim. *$*$-dimensiunea* lui $D$ este $sup\{n \mid 0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n,\ P_i$ $*$-ideal prim al lui $D\}$. Presupun acum ca $*$ este o star operatie de caracter finit. Atunci orice $*$-ideal propriu este continut intr-un $*$-ideal maximal, si functia $I \mapsto I^{\widetilde{*}} = \cap_{P \in Max_*(D)} ID_P$ pentru orice $I \in F(D)$ este o star operatie stabila si de caracter finit. Mai mult, $*$ este stabila daca si numai daca $* = \widetilde{*}$. Un $*$-ideal $I$ este de *tip finit* daca $I = (a_1, ..., a_n)^*$ pentru niste $a_1, ..., a_n \in I$. Un *domeniu*

*Mori* este un domeniu cu $t$-idealele de tip finit. Un domeniu se numeste *domeniu TV* daca orice $t$-ideal este si $v$-ideal. Un domeniu Mori este un domeniu TV.

Un ideal fractionar $I \in F(D)$ se numeste $*$-*inversabil* daca $(II^{-1})^* = D$, unde $I^{-1} = (D : I) = \{x \in K \mid xI \subseteq D\}$. Daca $*$ este de caracter finit, atunci $I$ este $*$-inversabil daca si numai daca $II^{-1}$ nu este continut in nici un $*$-ideal maximal al lui $D$; in acest caz $I^* = (a_1, ..., a_n)^*$ pentru niste $a_1, ..., a_n \in I$. Fie $*_1, *_2$ doua star operatii pe $D$. Scriem $*_1 \leq *_2$, daca $I^{*_1} \subseteq I^{*_2}$ pentru orice $I \in F(D)$. In acest caz avem $(I^{*_1})^{*_2} = I^{*_2} = (I^{*_2})^{*_1}$ si orice ideal $*_1$-inversabil este si $*_2$-inversabil. Cateva bine cunoscute star operatii sunt: *d-operatia* (data de $I \mapsto I$), *v-operatia* (data prin $I \mapsto I_v = (I^{-1})^{-1}$) si *t-operatia* (definita prin $t = v_f$). *w-operatia* este star operatia data prin $I \mapsto I_w = \{x \in K \mid xH \subseteq I$ pentru un ideal finit generat $H$ al lui $D$ cu $H^{-1} = D\}$. $w$-operatia este o star operatie stabila si de caracter finit. Pentru un domeniu intreg inchis $D$, *b-operatia* pe $D$ este star operatia definita prin $I \mapsto I_b = \cap_V IV$ unde $V$ parcurge multimea tuturor suprainelelor de valuare ale lui $D$. Pentru orice $I \in F(D)$, avem $I \subseteq I_w \subseteq I_t \subseteq I_v$. Sunt cunoscute in domeniu urmatoarele $Max_w(D) = Max_t(D)$ si $I_w = \cap_{M \in Max_t(D)} ID_M$. In consecinta, un ideal fractionar nenul este $w$-inversabil daca si numai daca este $t$-inversabil. Reamintim ca un domeniu $D$ se numeste $*$-*Dedekind* daca orice ideal fractionar nenul al lui $D$ este $*$-inversabil. Un domeniu $D$ se numeste Prufer $*$-*multiplication domain (P$*$MD)* daca orice ideal finit generat si nenul al lui $D$ este $*_f$-inversabil.

Putem introduce acum conceptul nou din acest articol.

**Definitie 1.** Fie $*$ o star operatie pe $D$. Un domeniu $D$ se numeste $*$-*sharp* daca pentru orice $I, A, B$ ideale nenule ale lui $D$ cu $I \supseteq AB$, avem existenta altor doua ideale nenule $H$ si $J$ care verifica $I^* = (HJ)^*$, $H^* \supseteq A$ si $J^* \supseteq B$.

Domeniile $d$-sharp sunt exact domeniile sharp studiate in [2]. Daca $*_1 \leq *_2$ sunt star operatii si $D$ este $*_1$-sharp atunci $D$ este $*_2$-sharp (Proposition 2.2). In particular, daca $*$ este o star operatie, atunci orice domeniu sharp este $*$-sharp si orice domeniu $*$-sharp este $v$-sharp. Un domeniu $t$-sharp este $v$-sharp dar reciproca nu este adevarata in general (Remark 2.8).

In sectiunea 2 din articol, sunt studiate domeniile $*$-sharp in cazul general. In acest context, sunt generalizate majoritatea rezultatelor din [2]. Pentru $* \in \{d, b, w, t\}$, orice inel de fractii al unui domeniu $*$-sharp este inca $*$-sharp (Proposition 2.2). Orice domeniu $*$-Dedekind este $*$-sharp. In particular, orice domeniu Krull este $t$-sharp (Proposition 2.4). Fie $D$ un domeniu si $*$ o star operatie stabila si de caracter finit astfel incat $D$ este $*$-sharp. Atunci $D$ este un P$*$MD de $*$-dimensiune $\leq 1$; mai mult, $D_M$ este un domeniu de valuare cu grupul valuarii un subgrup complet al grupului aditiv al numerelor reale, pentru orice $M \in Max_*(D)$ (Proposition 2.3). Reciproca este adevarata pentru domenii in care elementele nenule sunt continute doar intr-un numar finit de ideale $*$-maximale (Proposition 2.13). Daca $*$ este o star operatie pe $D$ astfel incat $D$ este un domeniu $*$-sharp atunci $I_v$ este $*$-inversabil pentru orice ideal nenul $I$ (Proposition 2.5). Daca $*$ este o star operatie stabila si de caracter finit pe $D$ astfel incat $D$ este un domeniu TV si $*$-sharp , atunci $D$ este $*$-Dedekind (Corollary 2.6). Un domeniu $D$ este $v$-sharp daca si numai daca $D$ este complet intreg inchis (Corollary 2.7). In particular, orice domeniu $*$-sharp este complet intreg inchis. Daca $*$ este o star operatie stabila pe $D$ astfel incat $D$ este un domeniu $*$-sharp atunci orice ideal finit generat si nenul al lui $D$ este $*$-inversabil (Proposition 2.11). Daca $D$ este un domeniu numarabil si $*$ este o star operatie stabila si de caracter finit pe $D$ astfel incat $D$ este $*$-sharp atunci $D$ este un domeniu $*$-Dedekind (Corollary 2.15).

In sectiunea 3 din articol, sunt studiate domeniile $t$-sharp. Au fost obtinute urmatoarele rezultate. Orice domeniu $t$-sharp $D$ este un PVMD cu $t$-dimensiunea $\leq 1$ si $D_M$ este un domeniu de valuare cu grupul valuarii un subgrup complet al grupului aditiv al numerelor reale, pentru orice $t$-ideal maximal $M$ al lui $D$ (Proposition 3.1). Un domeniu este $t$-sharp daca si numai daca este

$w$-sharp (Proposition 3.2). $D$ este domeniu Krull daca si numai daca $D$ este un domeniu TV si in plus $t$-sharp (Corollary 3.3). Daca $D$ este un domeniu $t$-sharp numarabil atunci $D$ este un domeniu Krull. (Corollary 3.4). Un domeniu $D$ este $t$-sharp daca si numai daca $D[X]$ este $t$-sharp (Proposition 3.7) sau echivalent: $D[X]_{N_v}$ este sharp (Proposition 3.9). Aici, prin $N_v$ notam submultimea multiplicativa a lui $D[X]$ formata din acei $f \in D[X] - \{0\}$ cu $c(f)_v = D$, unde $c(f)$ este idealul generat de coeficientii lui $f$. Fie $D$ un domeniu $t$-sharp. Atunci $N'_v = \{f \in D[[X]] - \{0\} \mid c(f)_v = D\}$ este o multime multiplicativa, $D[[X]]_{N'_v}$ este un domeniu sharp si orice ideal al lui $D[[X]]_{N'_v}$ este extins de la $D$ (Proposition 3.11). Mai mult, $D[[X]]_{N'_v}$ este un $D[X]_{N_v}$-modul fidel plat si exista o corespondenta bijectiva intre idealele lui $D[X]_{N_v}$ si idealele lui $D[[X]]_{N'_v}$ (Corollary 3.12).

## 2. REZULTATE STIINTIFICE OBTINUTE IN PARALEL

**1.** In luna mai a anului 2011 a fost lansata versiunea 2.7 a programului Normaliz (vezi [9]) impreuna cu interfata grafica jNormaliz 1.1 (vezi [4]). Facem aici o scurta prezentare a istoriei acestui program.

Prima versiune a programului Normaliz a fost un program C creat de Winfried Bruns si Robert Koch in 1997–1998 (vezi [10]) si extins in 2003 de Witold Jarnicki. Versiunea 2.0 (2007–2008) a fost complet rescrisa in C++ de Bogdan Ichim. Algoritmul Pottier pentru rezolvarea sistemelor de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare a fost adaugat in versiunea 2.1 (2009) de Bogdan Ichim. Gesa Kämpf, Bogdan Ichim, si Christof Söger au adaugat imbunatari la interfata programului in versiunea 2.2 (2009) si a fost realizat accesul catre sistemele de calcul Singular, Macaulay 2 si Polymake. In versiunea 2.5 (2010), a fost implementata o prima varianta de procesare paralela si algoritmii au fost imbunatatiti (vezi [8] si [7] pentru o parte din acesti noi algoritmi). De asemenea in Normaliz 2.5 au fost implementate noi moduri de operare care permit rezolvarea sistemelor compuse din ecuatii, inegalitati si congruente diofantice lineare. V. Almendra and B. Ichim au implementat pentru prima data o interfata grafica pentru Normaliz numita jNormaliz (2010). Folosind Normaliz 2.5 am reusit in colaborare cu R. Hemmecke si M. Köppe, dezvoltatorii programului 4ti2 (vezi [19]), sa rezolvam probleme computationale extrem de dificile provenite din algebra statistica [7]. Incepand cu anul 2010 Normaliz si jNormaliz au fost incluse in pachetul standard al distributiilor KNOPPIX/Math (vezi [23]) si Gentoo (vezi [18]). La inceputul anului 2011 fost realizat accesul Normaliz catre sistemul de calcul CoCoA.

In varianta disponibila curent (versiunea 2.7 lansata in mai 2011) a fost imbunatatita procesarea paralela si algoritmii de calcul ai seriilor si polinoamelor Hilbert.

Mentionam faptul ca programul Normaliz are in prezent aproximativ 100 de citari in reviste de prestigiu la nivel mondial.

**2.** In paralel cu dezvoltarea programului Normaliz, Bogdan Ichim impreuna cu Alin Stefan au lucrat la elaborarea unei lucrari denumita "The type of a product of transversal polymatroids and computational experiments", vezi [22]. Principalul rezultat al acestei lucrari sunt niste formule combinatoriale care permit calculul tipului algebrei asociate unui produs de polimatroizi transversali. Ca un corolar se obtin conditii necesare si suficiente ca o astfel de algebra sa fie Gorenstein.

Pentru a deduce aceste formule destul de complicate au fost efectuate un numar mare de experimente computationale folosind programele Normaliz [9] si Singular. Initial s-a folosit versiunea 2.7 a programului Normaliz, dar complexitatea calculelor fiind foarte mare (in unele cazuri pentru calculul seriilor Hilbert fiind necesara evaluarea unor functii in aproximativ $10^{16}$ puncte laticiale) s-a dovedit ca aceasta versiune nu este suficient de buna pentru a efectua aceste experimente. Prin urmare a fost necesara elaborarea unei noi versiuni a programului Normaliz, cu o mai buna paralelizare si axata pe acest tip de exemple, care in final a permis efectuarea acestor calcule extrem de complexe. Algoritmii experimentali folositi si implementarea lor in Normaliz vor fi disponibili in urmatoarea versiune de Normaliz care se va lansa in 2012.

## 3. Diseminarea rezultatelor

In scopul diseminarii rezultatelor s-au tinut zece prezentari de catre echipa grantului in cadrul seminariul de algebra al Institutului de Matematica ”Simion Stoilow” al Academiei Romane. Membrii echipei grantului au tinut sapte prezentari in cadrul Scolii Nationale de Algebra ”Computer Algebra and Combinatorics”, Bucuresti, 19-24 Septembrie 2011. In plus, dorim sa mentionam ca Bogdan Ichim si Marius Vladoiu au fost organizatorii principali ai acestei scoli.

Marius Vladoiu a participat la 2 conferinte internationale anul acesta, in care a prezentat rezultatele obtinute in articolul “Stanley depth and size of a monomial ideal” [21], raportat la acest grant anul trecut si fiind deja acceptat spre publicare in Proceedings of the American Mathematical Society. Cele 2 conferinte la care a participat sunt Conferinta MONomial Ideals, Computations and Applications. CIEM Castro Urdiales (Cantabria, Spain), iulie 11-13, 2011,
(vezi http://monica.unirioja.es/conference/monica_program.html ), respectiv Conferinta 5th World Conference on 21st Century Mathematics 2011, februarie 9-13, 2011, Lahore, Pakistan
(http://wc2011.sms.edu.pk/doku.php?id=programme). In plus, perioadele de cercetare petrecute de Marius Vladoiu in Germania si Grecia s-au materializat in 2 articole in colaborare cu profesori de la universitatile gazda, unul deja submis si disponibil online [20], iar cel de-al doilea fiind in curs de finalizare [12].

Bogdan Ichim a participat la MMMA 2011 (Matrix Methods in Mathematics and Applications, Moscova, Rusia, 22.06.2011 - 25.06.2011) unde a tinut o prezentare cu titlul ”Introduction to Normaliz 2.7”. De asemenea, Bogdan Ichim a participat la al 7-lea Congres al Matematicienilor Romania (Brasov, Romania, 29.06.2011 - 05.07.2011) unde a fost unul dintre organizatorii sectiei de algebra si a tinut o prezentare cu titlul ”Introduction to Normaliz 2.7”. De asemenea, la acest Congres au participat si ceilalti 2 membri ai contractului Mihai Epure si Dumitru Stamate.

Dumitru Stamate a participat la ISCCAAG (International School on Combinatorial and Commutative Algebra and Algebraic Geometry), Messina, Italia (16-21.10.2011) unde au tinut prelegeri Prof. Juergen Herzog si Prof. V. Welker. De asemenea a comunicat unele rezultate proprii intr-o prezentare cu titlul “Koszul property for affine semigroups”. Dumitru Stamate a participat ca invitat la WYRM (Workshop for Young Romanian Researchers) Constanta (12-13 mai 2011) unde a tinut o prezentare cu titlul “Koszul property for numerical semigroups”.

## Bibliografie


[1] Z. Ahmad and T. Dumitrescu, *Almost quasi-Schreier domains*, to appear in Comm. Algebra.
[2] Z. Ahmad, T. Dumitrescu and M. Epure, *A Schreier domain type condition*, (submitted), arXiv:1112.0132v1.
[3] Z. Ahmad, T. Dumitrescu and M. Epure, *A Schreier domain type condition II*, (submitted), arXiv:1112.1236v1.
[4] V. Almendra and B. Ichim, *jNormaliz. A graphical interface for Normaliz.* available at http://www.math.uos.de/normaliz.
[5] D.D. Anderson and S. Clarke, Star-operations that distribute over finite intersections, Comm. Algebra **32** (2005), 2263-2274.
[6] D.D. Anderson, T. Dumitrescu and M. Zafrullah, Quasi-Schreier domains II, Comm. Algebra **35** (2007), 2096-2104.
[7] W. Bruns, R. Hemmecke, B. Ichim, M. Köppe, and C. Söger, *Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics*. Exp. Math. **20** (2011), 1–9.
[8] W. Bruns and B. Ichim, *Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones.* J. Algebra **324** (2010), 1098–1113.
[9] W. Bruns, B. Ichim and C. Söger, *Normaliz. Algorithms for rational cones and affine monoids.* Available at `http://www.math.uos.de/normaliz`.

[10] W. Bruns and R. Koch, *Computing the integral closure of an affine semigroup.* Univ. Iagel. Acta Math. **39** (2001), 59–70.
[11] G.W. Chang, Strong Mori domains and the ring $D[x]_{N_v}$, J. Pure Appl. Algebra **197** (2005), 3669-3686.
[12] H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, *On the Universal Markov Basis and the generalized Lawrence liftings,* in preparation.
[13] T. Dumitrescu and W. Khalid, *Almost-Schreier domains*, Comm. Algebra. **38** (2010), 2981-2991.
[14] T. Dumitrescu and M. Zafrullah, *Characterizing domains of finite $*$-character*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 2087-2091.
[15] T. Dumitrescu and M. Zafrullah, *t-Schreier domains*, Comm. Algebra, **39** (2011), 808-818.
[16] S. El Baghdadi, M. Fontana and G. Picozza, *Semistar Dedekind domains*, J. Pure Appl. Algebra **193** (2004), 27-60.
[17] D. Eisenbud, C. Huneke, *Cohen–Macaulay Rees algebras and their specialization*, J. Algebra **81**, 202–224 (1983).
[18] Gentoo team, *Gentoo Linux.* Available from `http://www.gentoo.org/`.
[19] R. Hemmecke, R. Hemmecke and P. Malkin, *4ti2. Version 1.3.2. Computation of Hilbert bases, Graver bases, toric Gröbner bases, and more.* Available from `http://www.4ti2.de`.
[20] J. Herzog, A. Rauf, M. Vladoiu *The stable set of associated prime ideals of a polymatroidal ideal,* submitted to J. Algebraic Combin, arXiv:1109.5834v2.
[21] J. Herzog, D. Popescu, M. Vladoiu *Stanley depth and size of a monomial ideal,* Proc. Amer. Math. Soc. **140**, 2012, 493–504.
[22] B. Ichim and A. Ştefan, *The type of a product of transversal polymatroids and computational experiments.* Preprint (2011).
[23] T. Hibi JST CREST team, *KNOPPIX/Math.* Available from `http://www.knoppix-math.org/`.
[24] Q. Li, $(t,v)$*-Dedekind domains and the ring* $R[X]_{N_v}$, Results. Math. **59** (2011), 91-106.