

Raportare științifică

RST - Raport științific și tehnic in extenso privind implementarea proiectului PN-III-P4-ID-PCE-2020-0025 în etapa 2021

1 Rezumatul etapei

Contractul de finanțare nr. 30/2021 a avut drept scop în etapa 2021, intitulată *Clasificare și numărare pe varietăți LCK*, realizarea unor activități de cercetare științifică prin care să se obțină noi proprietăți cu privire la geometria și topologia varietăților local conform Kähler, în conformitate cu obiectivele asumate.

Obiectivele specifice ale proiectului în etapa 2021 au fost: numărarea curbilor eliptice pe varietăți Vaisman, descrierea tuturor valorilor posibile ale clasei de coomologie a formelor Lee și inexistența metricilor LCK pe anumite varietăți Oeljeklaus-Toma.

Activitățile desfășurate au constat în documentare și informare, analiză și concepere soluții de realizare, elaborare articole și participare la evenimente științifice pentru diseminarea rezultatelor obținute. Toate activitățile s-au finalizat în proporție de 100% la termenul stabilit și conform bugetului alocat prin contract.

Cercetarea întreprinsă de echipa proiectului în etapa 2021 s-a materializat printr-un număr de 6 articole științifice, ceea ce reprezintă dublul numărului planificat de articole. De asemenea, diseminarea rezultatelor s-a realizat prin participarea cu 18 expuneri invitate la conferințe internaționale și seminarii departamentale.

2 Descrierea științifică și tehnică

2.1 Articole publicate și preprinturi

În această etapă au fost elaborate 6 articole științifice, 2 dintre acestea fiind publicate în reviste cotate ISI, iar 4 trimise spre evaluare pentru o posibilă publicare. Conținutul celor 6 articole, ce acoperă în totalitate obiectivele propuse pentru această etapă, poate fi sintetizat după cum urmează:

1. L. Ornea, M. Verbitsky: *Closed orbits of Reeb fields on Sasakian manifolds and elliptic curves on Vaisman manifolds*, **Mathematische Zeitschrift** 299 (2021), 2287–2296.

O varietate compactă complexă V e Vaisman dacă și numai dacă admite o metrică hermitiană conformă cu o metrică Kähler și o acțiune conformă neizometrică prin omotetii a lui \mathbb{C} . Varietatea V e quasi-regulată dacă acțiunea lui \mathbb{C} are orbite închise. În acest caz, spațiul foilor e un orbifold proiectiv, numit câțul quasi-regulat al lui V . Se știe că mulțimea tuturor structurilor Vaisman quasi-regulate e densă în spațiul de deformări corespunzător. În acest articol numărăm curbele eliptice închise pe o varietate Vaisman închisă, demonstrând că acest număr e infinit ori egal cu suma tuturor numerelor Betti ale orbifoldului care e câțul proiectiv al lui V . De asemenea, dăm o nouă demonstrație unui rezultat al lui Rukimbira care arată că numărul de orbite închise ale câmpului Reeb pe o varietate Sasaki compactă e infinit ori egal cu suma numerelor Betti ale orbifoldului Kähler obținut ca un câț al lui M prin acțiunea lui S^1 .

2. C.W. Lee, J.W. Lee, G.-E. Vîlcu, *Classification of Casorati ideal Legendrian submanifolds in Sasakian space forms II*, **Journal of Geometry and Physics** 171 (2022), 104410.

În această lucrare sunt demonstrate două inegalități optimale pentru curburile Casorati generalizate $\delta_C(r; n-1)$ și $\widehat{\delta}_C(r; n-1)$ ale subvarietăților Legendriane n -dimensionale în forme spațiale Sasaki, unde r este un număr real astfel încât $0 < r < n(n-1)$, respectiv $r > n(n-1)$. De asemenea, sunt clasificate subvarietățile care satisfac cazurile de egalitate în cele două inegalități și sunt furnizate exemple de subvarietăți care sunt ideale pentru orice număr real r dat.

3. L. Ornea, M. Verbitsky, *Compact homogeneous locally conformally Kähler manifolds are Vaisman. A new proof*, arXiv:2110.12361.

O varietate LCK cu potențial e o varietate complexă cu un potențial Kähler pe acoperirea sa universală, astfel că fiecare transformare de acoperire multiplică potențialul cu o constantă reală. Demonstrăm că orice varietate LCK omogenă admite o metrică cu potențial LCK și folosim acest lucru ca să dăm o demonstrație nouă faptului că orice varietate LCK compactă și omogenă e Vaisman.

4. T. Albu, S. Dăscălescu, *Free objects and coproducts in categories of posets and lattices*, preprint 2021.

Un rezultat clasic din algebra universală spune că pentru orice tip τ de sistem algebric, dat de o mulțime de operatori și o mulțime de identități, există o τ -algebră liberă peste orice mulțime, adică functorul uituc de la categoria \mathbf{Alg}_τ a algebrelor de tip τ la categoria \mathbf{Set} a mulțimilor are un adjunct la stânga. Considerăm categoria \mathbf{Lat} a laticelor și categoria \mathbf{bLat} a laticelor mărginite, adică a laticelor cu 0 și 1. În prima dintre ele, morfismele sunt funcții care comută cu \vee și \wedge finite, în timp ce în a doua, morfismele păstrează și 0 și 1. Ambele categorii sunt de tipul \mathbf{Alg}_τ , deci functorii uituci la \mathbf{Set} au adjuncti la stânga. Pe de altă parte, colimite, în particular coproduse, există în orice \mathbf{Alg}_τ .

Scopul nostru este să discutăm existența obiectelor libere și a coproduselor în subcategoria plină $\overline{\mathbf{bLat}}$ a lui \mathbf{Lat} , ale cărei obiecte sunt toate laticele mărginite. Morfismele în $\overline{\mathbf{bLat}}$ sunt doar morfisme de latices, care nu păstrează neapărat 0 și 1. Considerăm probleme similare pentru mulțimi ordonate. Dacă \mathbf{Pos} este categoria mulțimilor (parțial)

ordonate, morfismele fiind aplicațiile crescătoare, \mathbf{bPos} este categoria mulțimilor ordonate mărginite, în care morfismele păstrează 0 și 1, iar $\overline{\mathbf{bPos}}$ este subcategoria plină a lui \mathbf{Pos} ale cărei obiecte sunt mulțimile ordonate mărginite, discutăm existența obiectelor libere și a coproduselor în $\overline{\mathbf{bPos}}$.

Arătăm că în $\overline{\mathbf{bPos}}$ nu există un obiect liber peste nicio mulțime cu cel puțin două elemente, în timp ce în $\overline{\mathbf{bLat}}$, există un obiect liber peste X dacă și numai dacă X este finită.

Demonstrăm și că $\overline{\mathbf{bPos}}$ nu are niciun coprodus, în timp ce $\overline{\mathbf{bLat}}$ are coproduse finite, dar nu are coproduse infinite. Pe de altă parte, așa cum am explicat mai sus, coprodusele există în \mathbf{Lat} ; existența lor poate fi obținută ca o aplicație a teoremei functorului adjunct. Includem o prezentare pe scurt a construcției acestor coproduse, deoarece acestea sunt legate de rezultatele noastre.

5. D. Angella, M. Parton, V. Vuletescu, *On locally conformally Kähler threefolds with algebraic dimension two* - preprint 2021 (arXiv:2005.09565 v4).

Articolul face parte din încercarea de a înțelege varietățile non-Moishezon ne-Kähleriene. Este studiat aici primul și cel mai simplu caz: varietăți complexe de dimensiune trei cu dimensiunea algebraică $a(X) = 2$. În acest caz, este un fapt clasic ca ele sunt bimeromorfe cu fibrări eliptice peste suprafețe proiective, adică există o varietate de dimensiune 3 X^* și o aplicație surjectivă olomorfă $f: X^* \rightarrow B$ cu fibra generală o curbă eliptică. De fapt, X^* este chiar (o) reducere algebraică a lui X . Scopul articolului este de a da o descriere a lui X^* și de aici să se recupereze informație despre X .

Generalizând ce se întâmplă pentru suprafețe non-Kähleriene de dimensiune algebraică 1 (a se vedea Propoziția 3.17 din [V. Brînzănescu, *Holomorphic vector bundles over compact complex surfaces, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1624, Springer-Verlag, Berlin, 1996]) demonstrăm că, sub o serie de ipoteze deloc restrictive, reducerea algebraică este un *quasi-bundle*, mai precis, o fibrare eliptică ce are toate fibrele izomorfe (când sunt înzestrate cu structura redusă). Ideea principală a strategiei este inspirată din teorema Lefschetz a secțiunii hiperplane, din geometria algebraică. Mai precis, considerăm divizori H pe B și studiem imaginile lor inverse $S_H := f^{-1}(H) \subset X$, profitând de rezultate cunoscute din teoria suprafețelor ne-Kähleriene.

6. O. Preda, M. Stanciu: *Vaisman theorem for LCK spaces* - preprint 2021.

Teorema lui Vaisman pentru varietăți local conform Kähler (lcK) afirmă că orice metrică lcK pe o varietate complexă compactă care admite o metrică Kähler este, de fapt, global conform Kähler (gcK). În acest articol, extindem această teoremă la spații complexe compacte cu singularități.

2.2 Expuneri invitate la conferințe internaționale

1. L. Ornea: *Elliptic curves on Vaisman manifolds*, Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures - II, 5-9.07, 2021, Levico Terme, Italia.
2. L. Ornea: *Locally conformally Kähler geometry. An overview*, Locally Conformal Symplectic Manifolds: Interactions and Applications, Banff, Canada, November 7-12, 2021.

3. A. Otiman: *Special non-Kähler metrics on solvmanifolds* (online), Complex Geometry and Lie Groups VI, February 2021, Niigata, Japan.
4. A. Otiman: *Special non-Kähler metrics on solvmanifolds*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, București, 20-21.05.2021.
5. A. Otiman: *Geometry of Kato manifolds* (online), Minisymposium "Topics in complex and quaternionic geometry", satellite event of the European Congress in Mathematics, June 2021, Portoroz, Slovenia.
6. A. Otiman: *Hermitian geometry of Oeljeklaus-Toma manifolds*, Cohomology of Complex Manifolds and Special Structures II, July 2021, Levico Terme, Italy.
7. A. Otiman: *Topics in locally conformally Kähler geometry* (online), 6th Geometry-Topology Summer School, August 2021, Feza Gürsey Institute, Turcia.
8. A. Otiman: *New Constructions in non-Kähler toric geometry* (online), PRIN seminar, October 2021, University of Florence.
9. A. Otiman: *Oeljeklaus-Toma manifolds*, Workshop on Balanced metrics and Monge Ampere masses, November 2021, University of Parma.
10. A. Otiman: *Hermitian geometry of Oeljeklaus-Toma manifolds* (online), Workshop on locally conformally symplectic manifolds: interactions and applications, Banff, Canada, November 2021.
11. A. Otiman: *New Constructions in non-Kähler toric geometry* (online), "Recent Developments in Complex Geometry and Geometric Analysis", Canadian Mathematical Society Winter Meeting, December 2021.
12. M. Stanciu: *Coverings of locally conformally Kähler complex spaces*, Workshop for Young Researchers in Mathematics, București, 20-21.05.2021.
13. G.-E. Vilcu: *Curvature invariants, optimal inequalities and ideal submanifolds in space forms*, 18th International Geometry Symposium, Inonu University, Malatya, 12-13 July 2021.

2.3 Expuneri invitate în seminarii departamentale

1. A. Otiman: *Toric Kato manifolds*, Almost Complex Geometry Seminar, City University of New York, March 2021.
2. A. Otiman: *Variational problems in conformal geometry*, Geometry Seminar, Vanderbilt University, March 2021.
3. A. Otiman: *Old and new constructions in non-Kähler geometry* (online), Aarhus University, May 2021.
4. A. Otiman: *Toric Kato manifolds* (online), Séminaire Géométrie Complexe, Université Aix-Marseille, December 2021.

5. M. Stanciu: *Vaisman's theorem for lcK spaces with singularities*, Geometry Seminar, University of Florence, 09.11.2021.

2.4 Mobilități

1. L. Ornea: 27.05-26.06.2021, deplasare în Italia, la Universitatea Roma 3, la invitația prof. Massimiliano Pontecorvo, pentru colaborare științifică pe teme de interes comun din geometria local conform Kähler.
2. C. Ciulică: 05.11-15.11.2021, deplasare la Università degli Studi Firenze, Italia, la invitația prof. Daniele Angella, pentru colaborare științifică pe teme de interes comun din geometria local conform Kähler (în legătură cu subiectul doctoratului său, care se încadrează în tema grantului).
3. M. Stanciu: 05.11-12.11.2021, deplasare la Università degli Studi Firenze, Italia, la invitația prof. Daniele Angella, pentru colaborare științifică pe teme de interes comun din geometria local conform Kähler și pentru a realiza o expunere la seminarul de geometrie al departamentului.
4. V. Marchidanu: 25.09.2021-17.10.2021, deplasare în Franța, la University of Strasbourg, la invitația prof. Alexandru Oancea, pentru colaborare științifică pe teme de interes comun din geometria (local conform) simplctică (subiect al dizertației sale de master, legată de tema grantului).

Director proiect,

Prof. dr. Liviu Ornea