Curs de Geometrie

Andrei-Dan Halanay

Cuprins

Lecţia 1

Introducere. Curbe în plan şi spaţiu

1.1 Introducere

Curbele plane au început să fie studiate de geometrii greci începînd cu Apollonios din Perga, autorul unui tratat despre conice, pe care le-a studiat motivat de traiectoriile corpurilor cereşti. Se pare că şi Euclid ar fi scris o lucrare despre secţiunile conice, dar aceasta s-a pierdut. Studiul conicelor a fost reluat 1800 de ani mai tîrziu de J. Kepler, cel care a formulat binecunoscutele legi ale mişcării planetelor în jurul Soarelui. R. Descartes şi I. Newton au dezvoltat geometria analitică şi analiza matematică pentru a pune legile lui Kepler pe un fundament riguros.

Alte clase de curbe au fost studiate de geometrii antici în încercarea de rezolvare a unor probleme de geometrie. Astfel Diocles, contemporan a lui Apollonius a introdus cisoida (numită astăzi a lui Diocles) pentru rezolvarea problemei duplicării cubului, iar Arhimede a folosit spirala care-i poartă numele pentru a rezolva cuadratura cercului (aceste soluţii nu respectă însă cerinţa fundamentală de a se utiliza doar rigla şi compasul). Începînd cu secolul al XVIII-lea un mare număr de curbe au fost studiate, definite fie ca locuri geometrice, fie prin ecuaţii implicite (de cele mai multe ori algebrice), fie ca traiectorii ale unor puncte materiale care se mişcă după anumite reguli.

După ce L.A. Cauchy a pus bazele riguroase ale analizei matematice, J.F. Frenet şi J.A. Serret au obţinut independent (în 1852) formulele fundamentale ale teoriei locale a curbelor. Începînd cu aceasta dată teoria curbelor s-a dezvoltat mai ales ca o ramură a analizei matematice. De asemenea studiul proprietăţilor globale ale curbelor s-a dovedit esenţial în toplogia algebrică, teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale, geometria diferenţială şi algebrică.

Cu toate că unele proprietăţi elementare ale suprafeţelor de rotaţie par a fi cunoscute încă din Antichitate, primele studii sistematice au fost făcute de L. Euler, folosind analiza matematică. În secolul următor, C.F. Gauss a adus contribuţii esenţiale în două articole publicate în 1825 şi 1827, obţinînd printre altele *teorema egregium* privind caracterul intrinsec al curburii. Ideile sale au fost extinse de elevul său B. Riemann, ducînd la introducerea noţiunii de varietate diferenţiabilă. De asemenea Riemann a introdus conceptul de *suprafaţă riemanniană* (cum se numeşte astăzi) pentru studiul proprietăţilor de prelungire analitică. A doua jumătate a secolului XIX a fost perioada de maximă înflorire a studiului suprafeţelor, atît din punct de vedere local, cît şi global. Rezultatele obţinute se regăsesc în monumentalul tratat al lui G.Darboux apărut în perioada 1887-1896.

Acest curs este bazat pe bibliografia „oficială" a cursului (din fişa unităţii de curs) în special pe [DoC]. De asemenea au fost folosite [Str], volumele II şi III din [Sp], [DNF], [Pos] etc.

1.2 Curbe. Noţiuni propedeutice şi exemple

O arc de curbă în spaţiu este o funcţie continuă $c : I \to \mathbb{R}^n$ de la un interval deschis (care poate avea unul sau ambele capete infinite) la spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$. În plus trebuie ca c să fie de clasă $\mathcal{C}^\infty$ în orice punct al lui I cu excepţia eventuală a unui număr finit de puncte. În acest curs vom presupune că n este 2 sau 3 (cazul dimensiunilor superioare este analog dimensiunii 3).

O curbă este o reuniune finită de arce, prin urmare o curbă va avea un număr finit de componente conexe.

Definiţia 1.1. *Fie o curbă $c : I \to \mathbb{R}^n$. Spunem că c este regulată în punctul $t_0 \in I$, dacă $c'(t_0) \neq 0$. Dacă c este regulată în orice punct, atunci c se numeşte curbă regulată. Un punct care nu este regulat se numeşte singular.*

Dacă trebuie să facem distincţia între mulţimea punctelor unei curbe şi parametrizarea acesteia, numim mulţimea punctelor unei curbe **suportul** acesteia.

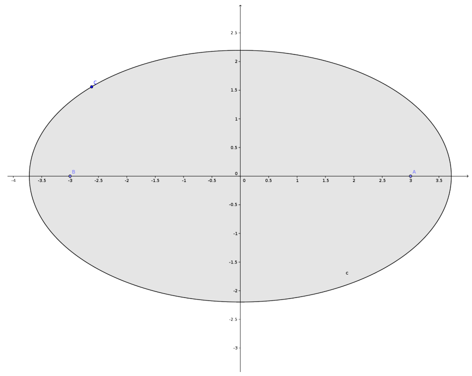
Adesea vom identifica punctul $c(t)$ cu t şi ne vom referi la punctul t al curbei. t se numeşte **paramentru local** al curbei. Deoarece în prima parte vom considera doar chestiuni locale adesea vom vorbi despre o curbă şi ne vom referi la un arc de curbă.

Definiţia 1.2. *Fie $c : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă netedă. Pentru orice $t \in I$ vectorul $c'(t) \in \mathbb{R}^n$ se numeşte* **vectorul tangent** *sau* **vectorul viteză** *al curbei în punctul t. Norma sa euclidiană $|c'(t)|$ se numeşte* **viteza** *în punctul t.*

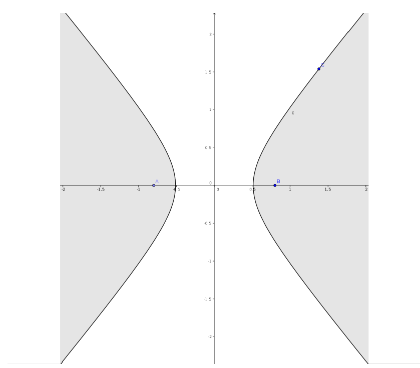
Reamintim că pentru un vector $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$. O primă problemă pe care o vom studia este următoarea:

Problema 1. *Fiind date două curbe regulate $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ şi $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ să se determine o condiţie necesară şi suficentă ca să existe o izometrie a spaţiului ambiant care duce pe c_1 peste c_2.*

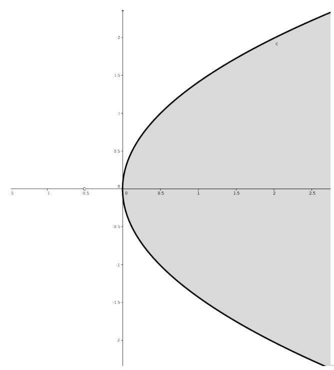
În anul I am întîlnit o clasă de curbe plane (avînd $n = 2$), anume conicele nedegenerate:



(a) Elipsa



(b) Hiperbola



(c) Parabola

Fig. 1.1: Conicele nedegenerate

Exerciţiul 1.1. Fie $c_1 : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $c_1(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$ şi $c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c_2(t) = (a\ \mathrm{ch}(t), b\ \mathrm{sh}(t))$, $a, b > 0$. Fie şi următoarele conice

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$
$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$
$$\mathcal{P} : y^2 = 2px.$$

a) Arătaţi că imaginea lui c_1 este conţinută în $\mathcal{E}$, iar imaginea lui c_2 este conţinută în $\mathcal{H}$. Este $c_1 : (0, 2\pi) \to \mathcal{E}$ injectivă? Dar surjectivă? Aceleaşi întrebări pentru $c_2 : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$.

b) Găsiţi o parametrizare pentru $\mathcal{P}$.

c) Există o curbă $c : I \to \mathcal{E}$ bijectivă? Aceeaşi întrebare pentru $\mathcal{H}$ şi $\mathcal{P}$.

d) Determinaţi vectorii tangenţi şi viteza pentru c_1, c_2 şi parametrizarea parabolei găsită la punctul b).

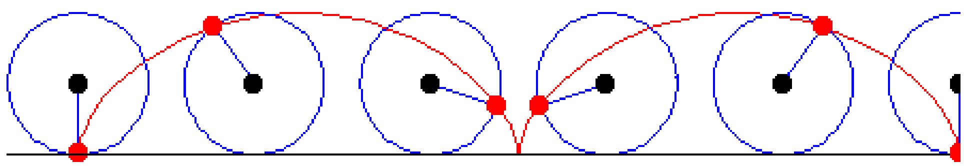
Un număr mare de curbe au o definiţie „dinamică”, spre exemplu:

Definiţia 1.3. *Se numeşte* **cicloidă** *curba descrisă de un punct care se află pe un cerc care se rostogoleşte fără frecare pe o dreaptă.*

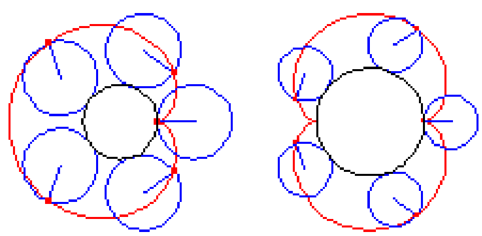
Se numeşte **epicicloidă** *curba descrisă de un punct aflat pe un cerc de rază* r *care se mişcă fără frecare pe* <u>*exteriorul*</u> *unui cerc de rază* R*.*

Se numeşte **hipocicloidă** *curba descrisă de un punct aflat pe un cerc de rază* r *care se mişcă fără frecare pe* <u>*interiorul*</u> *unui cerc de rază* R*.*

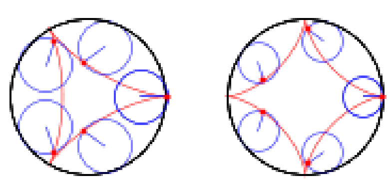
Epicicloidele din Fig.1.2.(b).se numesc cardioidă, respectiv nefroidă. Hipocicloidele din Fig.1.2(c). se numesc **deltoidă** (de la litera grecească Δ) prima, respectiv **astroidă** (de la grecescul $\alpha\sigma\tau\rho o$=stea) a doua.



(a) Cicloidă



(b) Epicicloide



(c) Hipocicloide

Fig. 1.2: Autor-E. Weisstein

Exerciţiul 1.2. a*) Determinaţi o parametrizare pentru cicloidă, epicicloidă şi hipocicloidă;

b) Pentru parametrizările obţinute anterior calculaţi vectorii viteză şi determinaţi punctele singulare (dacă există);

c*) Pentru epicicloidă, arătaţi că pentru $r = R$ obţineţi cardioida, iar pentru $R = 2r$ obţineţi nefroida.

d*) Pentru hipocicloidă, arătaţi că pentru $R = 3r$ obţineţi deltoida, iar pentru $R = 4r$ obţineţi astroida.

e**) Arătaţi că astroida este curbă Lamé (sau superelipsă), anume satisface o ecuaţie de forma

$$\left|\frac{x}{a}\right|^q + \left|\frac{y}{b}\right|^q = 1,$$

cu $q \in \mathbb{Q}$.

Un exemplu de curbă în spaţiu (numită şi curbă strîmbă) este elicea circulară. Aceasta are parametrizarea $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, cu $a, b > 0$.

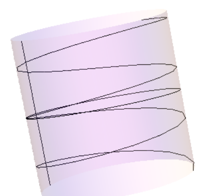


Fig. 1.3: Elice

Exerciţiul 1.3. a) Arătaţi că elicea este o curbă regulată cu suportul inclus în cilindrul de ecuaţie

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

b) Arătaţi că unghiul dintre axa cilindrului şi direcţia vectorului tangent în punctul $t \in \mathbb{R}$ nu depinde de t.

O singură curbă (văzută ca mulţime de puncte) poate admite mai multe parametrizări. Spre exemplu aceeaşi elice are atît parametrizarea $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, cît şi parametrizarea $\tilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{c}(t) = (a\cos(3t), a\sin(3t), 3bt)$. Se observa că $\tilde{c}$ ne dă o parametrizare mai „rapidă” a lui elicei faţă de c.

Un prim invariant al unei curbe este lungimea sa:

Definiţia 1.4. *Fie* $c : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *o curbă regulată. Se numeşte* **lungime a curbei** c *numărul*

$$l = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle}\, dt. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1. *Lungimea unui arc de curbă regulată nu depinde de parametrizare.*

Demonstraţie. Fie $c : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$ şi $e : I' = (a', b') \to \mathbb{R}^n$, $e(\tau) = (e^1(\tau), \dots, e^n(\tau))$ două parametrizări ale curbei. Atunci (cf. [Pos][Prop.1.1]) există o aplicaţie $\tau : (a, b) \to (a', b')$ cu $\tau(a) = a', \tau(b) = b'$, şi $\frac{d\tau}{dt} > 0$. Atunci $c(t) = e(\tau(t))$ pentru orice $t \in (a, b)$. Vitezele celor două parametrizări sînt legate de

$$\left|\frac{dc(t)}{dt}\right| = \left|\frac{de(\tau(t))}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}\right|. \tag{1.2}$$

Avem că

$$\left|\frac{de(\tau(t))}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{de^i}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt}\right)^2} = \left|\frac{d\tau}{dt}\right| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{de^i}{d\tau}\right)^2}. \tag{1.3}$$

Prin urmare, dacă l este lungimea dată de c şi l' cea dată de e în (1.1) avem

$$l = \int_a^b \left|\frac{dc(t)}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{de^i}{d\tau}\right)^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} dt = \int_{a'}^{b'} \frac{de(\tau)}{d\tau} d\tau = l'. \tag{1.4}$$

Am folosit faptul că $\frac{d\tau}{dt} > 0$. $\square$.

Am văzut deci că lungimea unei curbe nu depinde de viteza cu care o parcurgem. Pentru a uşura studiul curbelor avem o parametrizare preferată:

Definiţia 1.5. *Spunem că o curbă* $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *este* **parametrizată după lungimea arcului**, *dacă* $\left|\frac{dc}{dt}\right| = 1$ *pentru orice* $t \in (a, b)$.

Se vede imediat că dacă o curbă este parametrizată după lungimea arcului, atunci

$$l = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt = b - a. \tag{1.5}$$

Teorema 1.2. *Orice curbă regulată admite o parametrizare după lungimea arcului.*

Demonstraţie. Fie $c : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$ o parametrizare a curbei. Fixăm un $t_0 \in I$ şi definim

$$l(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{c}(s)| ds. \tag{1.6}$$

Evident $\frac{dl(t)}{dt} = |\dot{c}(t)| > 0$. Prin urmare funcţia $l : I \to J$ este continuă şi crescătoare ($J = l(I)$ este, din continuitatea lui l, un interval). Prin urmare există o funcţie inversă $t : J \to I$ şi o reparametrizare $e : J \to \mathbb{R}^n$ a curbei, $e(l) = c(t(l))$.

$$\dot{e}(l) = \frac{dc(t(l))}{dt} \cdot \frac{dt}{dl}$$

şi

$$\left|\frac{de}{dl}\right| = \left|\frac{dt}{dl}\right| \cdot \left|\frac{dc}{dt}\right| = \frac{dt}{dl} \cdot |\dot{c}(t)| = 1,$$

deoarece

$$\frac{dt(l)}{dl} = \frac{1}{|\dot{c}(t(l))|}, \forall l \in J$$

datorită lui (1.6).□

Exerciţiul 1.4. a)* Calculaţi lungimea curbelor considerate la exerciţiile 1.1 şi 1.2. Găsiţi parametrizările după lungimea arcului pentru aceste curbe.

b) Fie o curbă plană de avînd paramaetrizarea $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t, f(t))$ pentru o funcţie de clasă $\mathbf{C}^\infty$ $f : I \to \mathbb{R}$. Calculaţi lungimea lui c. Determinaţi parametrizarea după lungimea arcului a curbei.

Bibliografie

[DNF] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern geometry---methods and applications. Part I*, volume 93 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields, Translated from the Russian by Robert G. Burns.

[DoC] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[Pos] M.M. Postnikov. *Smooth manifolds*. „Mir”, Moscow, 1989. Lectures in geometry. Semester III, Translated from the Russian by Vladimir Shokurov.

[Sp] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I-V*. Publish or Perish Inc., Houston, TX, third edition, 1999.

[Str] Dirk J. Struik. *Lectures on classical differential geometry*. Dover Publications Inc., New York, second edition, 1988.

Lecţia 2

Teorema fundamentală a teoriei locale

În această lecţie vom construi invarianţi numerici pentru curbe în spaţiu, invarianţi care determină natura curbei.

Pentru aceasta fie $c : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă parametrizată după lungimea arcului (adică $|c'(s)| \equiv 1$. Considerăm acum a doua derivată. Avem

Definiţia 2.1. *Fie* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *o curbă parametrizată după lungimea arcului. Se numeşte* **curbura** *lui* c *în punctul* s *numărul* $\kappa(s) = |c''(s)|$.

Cum norma primei derivate a curbei este constantă, avem

$$0 = \frac{d}{ds}|c'(s)| = \frac{d}{ds}\langle c'(s), c'(s)\rangle = 2 \cdot \langle c'(s), c''(s)\rangle, \tag{2.1}$$

deci vectorii $c'(s)$ şi $c''(s)$ sînt ortogonali, în particular liniar-independenţi. Considerăm vectorul $\mathbf{n}(s)$, definit prin $c''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$. $n(s)$ se numeşte **vectorul normal** în s la c. Planul care trece prin $c(s)$ şi care are versorii $c'(s)$ şi $\mathbf{n}(s)$ se numeşte **planul osculator** al lui c. Vom nota cu $\mathbf{t}(s)$ vectorul tangent la c în s, anume $c'(s)$. Considerăm vectorul $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$, numit **binormal**. Acesta este ortogonal pe planul osculator. Cum $\mathbf{b}(s)$ are norma 1, $|\mathbf{b}'(s)|$ măsoară variaţia planului osculator cînd s variază. Calculăm derivata lui $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s). \tag{2.2}$$

Obţinem că $\mathbf{b}'(s)$ este ortogonal pe $\mathbf{t}(s)$, deci coliniar cu $\mathbf{n}(s)$. Deci

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s). \tag{2.3}$$

Definiţia 2.2. *Fie* $c : I \to \mathbb{R}^3$, *o curbă parametrizată canonic, astfel încît* $c''(s) \neq 0$, *pentru orice* $s \in I$. *Numărul* $\tau(s)$ *definit prin* $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$ *se numeşte* **torsiunea** *lui* c *în* s.

Se observă că dacă o curbă este plană (conţinută într-un singur plan), atunci torsiunea sa este nulă, deoarece vectorul binormal este constant, prin urmare planul osculator nu se schimbă.

Reciproc să presupunem că $\tau \equiv 0$ şi $\kappa(s) \neq 0$, pentru orice $s \in I$. Atunci $\mathbf{b}(s) = b_0$ este constant. Prin urmare

$$\frac{d}{ds}\langle c(s), b_0\rangle = \langle c'(s), b_0\rangle = 0. \tag{2.4}$$

Deci $\langle c(s), b_0\rangle = d$ cu d constantă. Fie $b_0 = (a_1, a_2, a_3)$. Avem că $c_1(s)a_1 + c_2(s)a_2 + c_3(s)a_3 = d$, adică c este conţinută în planul de ecuaţie

$$a_1x + a_2y + a_3z = d. \tag{2.5}$$

Tripletul $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ asociată fiecărui punct al curbei c se numeşte **triedrul lui Frenet**. Am calculat derivatele lui $\mathbf{t}$ şi $\mathbf{b}$. Calculăm acum derivata lui $\mathbf{n}$. Avem că $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$. Prin urmare

$$\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s) = -\tau(s)\mathbf{b}(s) - \kappa(s)\mathbf{t}(s). \tag{2.6}$$

Pe scurt avem **formulele lui Frenet**

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= \tau\mathbf{n} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Planul generat de $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}\}$ se numeşte **planul rectifiant**, iar cel generat $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ se numeşte **planul normal**. Numărul $R = 1/\kappa$ se numeşte **raza de curbură**.

Formulele lui Frenet determină local curba. Mai precis avem teorema fundamentală

Teorema 2.1. *Fie două funcţii diferenţiabile $\kappa : I \to (0, \infty)$ şi $\tau : I \to \mathbb{R}$. Atunci există o curbă parametrizată după lungimea arcului $c : I \to \mathbb{R}^3$ având în fiecare punct s curbura $\kappa(s)$ şi torsiunea $\tau(s)$. Mai mult două curbe având aceleaşi curbură şi torsiune (în fiecare punct) se corespund printr-o izometrie.*

Demonstraţie. Considerăm relaţiile (2.7) ca un sistem de ecuaţii diferenţiale cu necunoscutele $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$. Cum sistemul este liniar teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme liniare ne spune că pentru un $s_0 \in I$ şi valorile inţiale $\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0) \in \mathbb{R}^3$ există şi este unic un sistem de trei funcţii $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^3$ satisfăcînd sistemul (2.7).

Vom construi curba $c : I \to \mathbb{R}^3$ astfel încît $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{n}\}$ să fie triedrul său Frenet în orice punct $s \in I$. Pentru început vom arăta că $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ este un reper ortonormat pentru orice s.

Fie funcţiile

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle, \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle, \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle, \langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle, \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle. \tag{2.8}$$

Derivînd obţinem

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle' &= \kappa\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle - \kappa\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle - \tau\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle,\\
\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle' &= \kappa\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle + \tau\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle,\\
\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle' &= -\kappa\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle - \tau\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle + \tau\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle,\\
\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle' &= 2\kappa\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle,\\
\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle' &= -2\kappa\langle \mathbf{n}, \mathbf{t}\rangle - 2\tau\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle,\\
\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle' &= 2\tau\langle \mathbf{b}, \mathbf{n}\rangle
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Acest sistem de ecuaţii admite soluţia

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}\rangle \equiv 0, \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle \equiv 0, \langle \mathbf{n}, \mathbf{b}\rangle \equiv 0, \langle \mathbf{t}, \mathbf{t}\rangle \equiv 1, \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}\rangle \equiv 1, \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle \equiv 1, \tag{2.10}$$

cu condiţia iniţială $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$. Din unicitate rezultă că într-adevăr $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ este ortonormat în orice $s \in I$.

Luăm acum o primitivă a lui $\mathbf{t}$:

$$c(s) = \int \mathbf{t}(s) ds. \tag{2.11}$$

După cum se ştie foarte bine primitiva este unică pînă la adunarea cu o constantă, ceea ce geometric se traduce printr-o translaţie.

Este evident că $c'(s) = \mathbf{t}(s)$ şi $c''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$. Calculăm a treia derivată şi obţinem

$$c''' = \kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}' = \kappa'\mathbf{n} - \kappa^2\mathbf{t} - \kappa\tau\mathbf{b}, \tag{2.12}$$

din formula (2.21) (ţinînd seama de proprietăţile normei produsului vectorial) obţinem că torsiunea curbei c este

$$-\frac{\langle c' \times c'', c'''\rangle}{\kappa^2} = -\frac{\langle \mathbf{t} \times \kappa\mathbf{n}, (-\kappa^2\mathbf{t} + \kappa'\mathbf{n} - \kappa\tau\mathbf{b})\rangle}{\kappa^2} = \tau. \tag{2.13}$$

Deci curba c este curba căutată.

Pentru unicitatea presupunem că există o altă curbă $\bar{c} : I \to \mathbb{R}^3$ avînd aceleaşi curbură şi torsiune. Fie $s_0 \in I$ şi $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ reperul Frenet al lui c în s_0, şi $\{\bar{\mathbf{t}}_0, \bar{\mathbf{n}}_0, \bar{\mathbf{b}}_0\}$ reperul Frenet al lui $\bar{c}$. Cum cele două repere sînt pozitiv orientate există o rotaţie a spaţiului care îl duce pe primul peste al doilea. Cum ambele repere satisfac sistemul de ecuaţii diferenţiale (2.7) (cu aceiaşi coeficienţi) rezultă ipoteza. □

După cum am văzut în lecţia precedentă cu toate că există pentru orice curbă regulată o parametrizare după lungimea arcului, în practică aceasta poate fi greu de găsit (de cele mai multe ori imposibil cu funcţii elementare). Din acest motiv vom studia curbura, torsiunea şi reperul Frenet pentru curbe regulate, nu neapărat parametrizate după lungimea arcului.

Cum viteza curbei ($|c'|$) nu va mai fi constantă , în general c'' nu va mai fi ortogonal pe c'. Vom vedea că în general $c''(t)$ şi $c'(t)$ sînt liniar independente, cu excepţia eventual al unei mulţimi discrete de puncte.

Fie $c : I \to \mathbb{R}$, $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ o curbă regulată şi $I_0 \subset I$ un interval astfel încît $c'(t)$ şi $c''(t)$ sînt liniar-dependente pentru orice $t \in I_0$. Adică există $a \in \mathbb{R}$ astfel încît $c''(t) = a \cdot c'(t)$. Pe componente

$$\begin{aligned} x''(t) &= ax'(t) \\ y''(t) &= ay'(t) \\ z''(t) &= az'(t), \end{aligned}$$

integrînd în ambii membri obţinem

$$x'(t) = ax(t) + x_0 \tag{2.14}$$

$$y'(t) = ay(t) + y_0 \tag{2.15}$$

$$z'(t) = az(t) + z_0. \tag{2.16}$$

Exerciţiul 2.1. Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale (2.14 - 2.16) şi arătaţi că imaginea lui c este o dreaptă în spaţiu (în particular $c''(t) \equiv 0$).

Astfel dacă nu avem de-a face cu o dreaptă, putem presupune că prima şi a doua derivată sînt liniar-independente. Definim vectorii care formeazaă reperul Frenet prin analogie cu cazul canonic.

- Vectorul tangent are normă 1 şi este coliniar cu c. În cazul nostru vom avea $\mathbf{t}(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$;
- Vectorul binormal este ortogonal pe planul osculator, generat de prima şi a doua derivată (vectorii tangent şi normal în cazul canonic). Astfel $\mathbf{b}(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{|c'(t) \times c''(t)|}$.
- Vectorul normal completează reperul Frenet (acesta fiind un reper ortonormat, pozitiv orientat). Deci $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$, exact ca în cazul parametrizării după lungimea arcului.

Se vede cu uşurinţă că planele osculator, normal şi rectifiant rămîn constante.

Fie $s(t)$ lungimea arcului de curbă pînă la punctul t. Am văzut că $\frac{ds(t)}{dt} = |c'(t)|$. Avem $\mathbf{t}(s(t)) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$. Derivăm în raport cu t şi obţinem

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{t}(s(t))) = \frac{|c'(t)|c''(t) - \frac{\langle c'(t), c''(t)\rangle}{|c'(t)|}c'(t)}{|c'(t)|^2}. \tag{2.17}$$

Dezvoltînd în membrul stîng obţinem

$$|c'(t)|\kappa(t)\mathbf{n}(s(t)) = \frac{|c'(t)|c''(t) - \frac{\langle c'(t), c''(t)\rangle}{|c'(t)|}c'(t)}{|c'(t)|^2}. \tag{2.18}$$

Deci $k(t)$ este norma vectorului

$$\mathbf{v} = \frac{|c'(t)|c''(t) - \frac{\langle c'(t), c''(t)\rangle}{|c'(t)|}c'(t)}{|c'(t)|^3}.$$

La pătrat curbura este egală cu

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{|c'(t)|^6}(|c'(t)|^2|c''(t)|^2 - \langle c'(t), c''(t)\rangle^2 = \frac{|c'(t) \times c''(t)|^2}{|c'(t)|^6}.$$

Prin urmare

$$\kappa(t) = \frac{|c'(t) \times c''(t)|}{|c'(t)|^3}. \tag{2.19}$$

Analog obţinem (calculele pot fi găsite în [Ra] sau [K]).

$$\mathbf{n} = \frac{c' \times (c'' \times c')}{|c'||c'' \times c'|}, \tag{2.20}$$

$$\tau = -\frac{\langle c' \times c'', c'''\rangle}{|c' \times c''|^2}. \tag{2.21}$$

Forma generală a formulelor lui Frenet (pentru o parametrizare arbitrară) este

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{t}(t) \\ \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix} = |c'(t)| \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(t) \\ \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Pentru o curbă plană $c : I \to \mathbb{R}^2$, parametrizată canonic, avem ca şi în cazul precedent că $c'(s)$ şi $c''(s)$ sînt ortogonali pentru orice $s \in I$. Luăm vectorul normal $\mathbf{n}$ punînd condiţia ca reperul $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ să aibă aceeaşi orientare cu reperul canonic. Curbura este definită de condiţia

$$\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}. \tag{2.23}$$

Spre deosebire de cazul tridimensional, curbura este un număr real arbitrar. Se vede cu uşurinţă că noţiunea de curbură definită anterior coincide cu $|\kappa|$, definită acum.

Exerciţiul 2.2. Arătaţi că pentru o curbă plană regulată $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$, curbura are formula

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.24}$$

Exerciţiul 2.3. 1. Determinaţi reperul Frenet, planele osculator, normal şi binormal, curbura şi torsiunea elicei (definită la exerciţiul 1.3).

2. Numim elice orice curbă $c : I \to \mathbb{R}^3$, cu proprietatea că toate direcţiile tangente fac un unghi constant cu o direcţie dată. Presupunem că $\tau(s) \neq 0$, pentru orice $s \in I$. Arătaţi:

   (a) c este elice dacă şi numai dacă $\frac{\kappa}{\tau} = const.$;

   (b) c este elice dacă şi numai dacă toate dreptele care trec prin $c(s)$ şi au direcţia $n(s)$ sînt paralele cu un plan fix;

   (c) c este elice dacă şi numai dacă toate dreptele care trec prin $c(s)$ şi au direcţia $b(s)$ fac un unghi constant cu o direcţie dată.

Exerciţiul 2.4. Presupunem că toate normalele unei curbe trec printr-un punct fix. Atunci curba este conţinută într-un cerc.

Exerciţiul 2.5. Presupunem că pentru o curbă $c : I \to \mathbb{R}^3$, $\tau(s) \neq 0$ şi $\kappa'(s) \neq 0$. Atunci c se află pe o sferă, dacă şi numai dacă

$$R^2 + (R')^2 T^2 = const., \tag{2.25}$$

unde $R = \frac{1}{\kappa}$, $T = \frac{1}{\tau}$.

Exerciţiul 2.6. Fie curba obţinută prin intersecţia unei sfere cu un cilindru tangent la sferă şi care conţine centrul sferei (curba lui Viviani). Determinaţi o parametrizare a curbei, calculaţi curbura şi torsiunea sa. Comparaţi cu exerciţiul precedent.

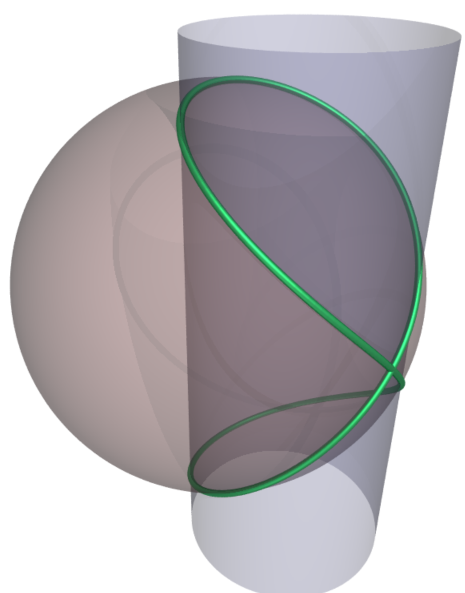


Fig. 2.1: Curba lui Viviani-Sursă: Wikipedia

Exercițiul 2.7. Determinați curbura elipsei, hiperbolei și parabolei pentru parametrizările găsite la exercițiul 1.1.

Exercițiul 2.8 (Lemniscata lui Bernoulli). Fie curba definită ca locul geometric al punctelor din plan, pentru care produsul distanțelor la două puncte fixe F_1 și F_2 este constant ($PF_1 \cdot PF_2 = a^2$). Determinați o parametrizare $c : I \to \mathbb{R}^2$ a acestei curbe. Determinați (dacă există) punctele în care c' și $c"$ nu sînt liniar-independente. Calculați curbura lemniscatei (în punctele în care este definită).

Exercițiul 2.9. Aceeași întrebare pentru curbele cu parametrizările găsite la exercițiul 1.2

Bibliografie

[K] Richard Koch. Mathematics 433/533; class notes. disponibil la `http://pages.uoregon.edu/koch/math433/Final.pdf`.

[Ra] П.К. Рашевский. *Курс дифференциалной геометрии.* Государственное издательство технико-теоретичекой литературы, Москва-Ленинград, 1950.

Lecția 3

Aspecte geometrice

3.1 Curbe strîmbe

Pentru început vom vedea cum se comportă local o curbă în spaţiu în vecinătatea unuia dintre punctele sale regulate. Pentru aceasta, fie $c : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă regulată, parametrizată canonic, $s_0 \in I$ şi $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ reperul Frenet în s_0. Presupunem că în s_0, curbura şi torsiunea sînt nenule (deci rămîn nenule pe un interval). Putem presupune că $s_0 = 0$, $c(0) = 0$ şi reperul Frenet coincide cu reperul canonic $\{e_1, e_2, e_3\}$. Dezvoltăm în jurul lui 0 în serie Taylor şi obţinem

$$c(s) = c(0) + s \cdot c'(0) + \frac{s^2}{2}c''(0) + \frac{s^3}{6}c'''(0) + \cdots . \tag{3.1}$$

Avem că $c(0) = 0$, $c'(0) = \mathbf{t}_0 = e_1$, $c''(0) = \kappa(0)\mathbf{n}_0 = \kappa(0)e_2$, $c'''(0) = \kappa'(0)\mathbf{n}_0 + \kappa(0)\mathbf{n}_0'$. Din formulele lui Frenet rezultă că $c'''(0) = \kappa'(0)\mathbf{n} - \kappa(0)^2\mathbf{t} - \kappa(0)\tau(0)\mathbf{b} = -\kappa(0)^2 e_1 + \kappa'(0)e_2 - \kappa(0)\tau(0)e_3$, unde κ şi τ sînt curbura, respectiv torsiunea lui c. Deci

$$c(s) = s \cdot e_1 + \frac{s^2}{2}\kappa(0)e_2 + \frac{s^3}{6}(-\kappa(0)^2 e_1 + \kappa'(0)e_2 - \kappa(0)\tau(0)e_3) + \cdots \tag{3.2}$$

Presupunem că $c(s) = (x(s), y(s), z(s))$ în reperul $\{e_1, e_2, e_3\}$. Grupînd termenii după coordonate obţinem

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \kappa(0)^2\frac{s^3}{6} + \cdots \\ y(s) &= \kappa(0)\frac{s^2}{2} + \kappa'(0)\frac{s^3}{6} + \cdots \\ z(s) &= -\kappa(0)\tau(0)\frac{s^3}{6} + \cdots \end{aligned} \tag{3.3}$$

Neglijăm toţi termenii cu excepţia primului şi obţinem că proiecţia curbei pe planul osculator este, aproximativ o parabolă (Fig. 3.1)

$$x = s, \qquad y = \frac{\kappa(0)}{2}s^2. \tag{3.4}$$

Am folosit faptul că în sistemul de coordonate ales planul osculator are ecuaţia $z = 0$.

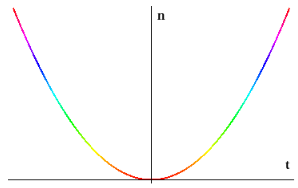


Fig. 3.1: Proiecţia pe planul osculator

De asemenea proiecţia pe planul normal (avînd ecuaţia $x = 0$) este aproximativ o parabolă semi-cubică (Fig. 3.2)

$$y = \frac{\kappa(0)}{2}s^2, \qquad z = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3. \tag{3.5}$$

Numele curbei provine din faptul că prin eliminarea lui s, se obţine o ecuaţie implicită de tipul $y = \pm a x^{\frac{3}{2}}$.

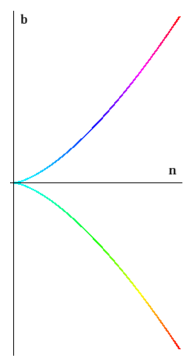


Fig. 3.2: Proiecţia pe planul normal

Proiecţia pe planul rectifiant (de ecuaţie $y = 0$) este o parabolă cubică (Fig. 3.3)

$$x = s, \qquad z = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3. \tag{3.6}$$

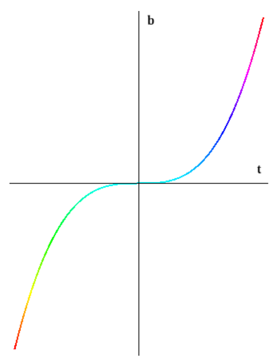


Fig. 3.3: Proiecţia pe planul normal

Astfel obţinem o imagine destul de bună a cum arată o curbă în vecinătatea unui punct regulat în care curbura şi torsiunea sînt nenule.

Din ecuaţiile (3.3) obţinem că pe o vecinătate a lui s_0, curba se află de aceeaşi parte a planului rectifiant deoarece $y(s) \geqslant 0$ pe o vecinătate a lui s_0 (curbura fiind strict pozitivă), cu egalitate doar în cazul cînd $s = 0$.

Considerăm acum familia planelor care trec prin punctul $c(s+h)$ şi conţin tangenta în s. Presupunem că $s = 0$. Tangenta în 0 poate fi privită ca intersecţia planelor osculator şi rectifiant. Deci are ecuaţiile implicite

$$z = 0$$
$$y = 0.$$

Deci orice plan care conţine tangenta va avea ecuaţia de forma $az + by = 0$, cu $(a, b) \neq (0, 0)$. Dacă $a = 0$, obţinem planul rectifiant, care după cum am văzut nu mai conţine alte puncte în vecinătatea lui $c(0)$. Putem deci presupune că planul are ecuaţia $z = cy$. Planul conţine punctul $c(s + h)$ (pentru $s = 0$), dacă şi numai dacă

$$c = \frac{z(h)}{y(h)} = \frac{-\frac{\kappa\tau}{6}h^3 + \cdots}{\frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa^2}{6}h^3 + \cdots}.$$

Facînd pe $h \to 0$ obţinem că $c = 0$, adică se obţine planul osculator.

Prin urmare planul osculator este limita planelor determinate de tangenta în s, şi de punctele $c(s + h)$.

Planul osculator este de asemenea limita planelor determinate de punctele $c(s+h_1), c(s)$ şi $c(s+h_2)$. Într-adevăr, să presupunem din nou că $s = 0$ şi $c(0) = 0$. Atunci orice plan care conţine $c(s)$ are o ecuaţie de forma $ax+by+cz = 0$. Definim $F(s) = ax(s)+by(s)+cz(s)$. Atunci $F(0) = F(h_1) = F(h_2) = 0$. Ţinînd seama de ecuaţia (3.3) avem că $F(s) = a \cdot s - a\kappa\frac{s^3}{6} + \cdots + b\kappa\frac{s^2}{2} + b\kappa'\frac{s^3}{6} + \cdots - c\kappa\tau\frac{s^3}{6} + \cdots$. Deci $F'(0) = a, F''(0) = b\kappa$. Din teorema lui Rolle avem că există $k_1 \in (0, h_1)$ şi $k_2 \in (0, h_2)$ astfel încît $F'(k_1) = 0 = F'(k_2)$. Mai aplicăm o dată teorema lui Rolle pentru F' şi intervalul (k_1, k_2). Atunci există $k_3 \in (k_1, k_2)$ astfel încît $F''(k_3) = 0$. Făcînd acum $h_1, h_2 \to 0$ obţinem că $a \to 0$, şi $b \to 0$. Deci planul tinde către planul $z = 0$, adică planul osculator. Această proprietate arată că planul osculator aproximează cel mai bine curba.

Vom da acum o caracterizare geometrică a curburii. Fie un cerc care trece prin 3 puncte de pe curbă $(s+h_1, s, s+h_2)$. Acest cerc este determinat de două ecuaţii: una a unei sfere de centru $\mathbf{c}$ şi rază r

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{c} \rangle = r^2 \tag{3.7}$$

şi una a planului generat de puncte. Cînd $h_1 \to 0, h_2 \to 0$, planul devine planul osculator. Ca şi mai sus considerăm funcţia $f(s) = \langle \mathbf{x}(s) - \mathbf{c}, \mathbf{x}(s) - \mathbf{c} \rangle - r^2$. Avem $f(s) = f(s + h_1) =$

$f(s+h_2) = 0$. Derivatele sînt

$$f'(s) = 2 \cdot \langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}(s) - \mathbf{c} \rangle, \tag{3.8}$$

$$f''(s) = 2\left(\langle \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s) - \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}'(s) \rangle\right) = 2\left(\langle \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s) - \mathbf{c} \rangle + 1\right). \tag{3.9}$$

Cu aceleaşi argumente ca în cazul planului osculator obţinem că

$$f'(0) = 0$$
$$f''(0) = 0.$$

Deci $c(s) - \mathbf{c}$ se află în planul osculator şi este ortogonal pe vectorul tangent. Prin urmare $c(s) - \mathbf{c} = \mu \cdot \mathbf{n}$. Din anularea celei de-a doua derivate, obţinem că $\langle \kappa\mathbf{n}, \mu \cdot \mathbf{n} \rangle = -1$, deci $\mu = -\frac{1}{\kappa}$, adică $\mathbf{c} = c(s) - \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$. Astfel am obţinut că centrul cercului limită (numit **cercul osculator**) se află pe dreapta normală, cercul are raza egală cu $\frac{1}{\kappa}$.

Exerciţiul 3.1. a) Arătaţi că vectorul tangent la cercul osculator coincide cu vectorul tangent la curbă.

b) Determinaţi centrul cercului osculator pentru un punct aparţinînd elicei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(t), \sin(t), t)$

3.2 Curbe plane

Putem defini cercul osculator şi pentru curbe plane (în acest caz planul osculator este chiar planul în care se află curba). Raza sa va fi egală cu $\frac{1}{|\kappa|}$, iar centrul se va afla pe dreapta normală în $c(s)$. Fie P punctul $c(s)$ şi O centrul cercului osculator. Vectorul $\overrightarrow{PO}$ are acelaşi sens cu $\mathbf{n}$ dacă $\kappa > 0$ şi sens contrar dacă este negativă. Centrul cercului osculator se numeşte **centrul de curbură** al curbei în punctul P.

O interpretare „intuitivă” a cercului osculator este următoarea: presupunem că un automobil se mişcă de-a lungul curbei c şi în momentul t_0 volanul se blochează. Atunci automobilul începe să se mişte pe cercul osculator.

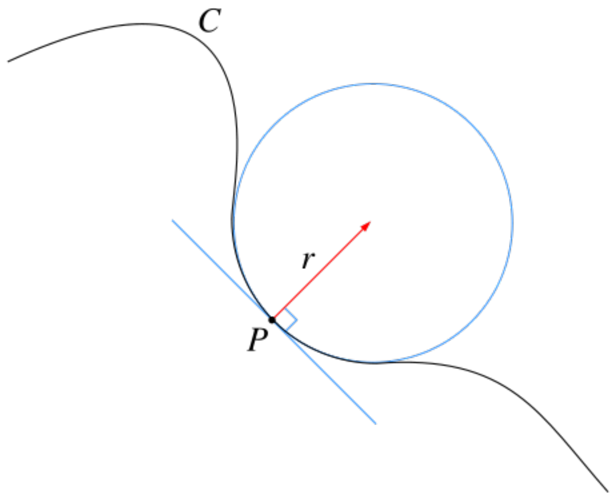


Fig. 3.4: Cercul osculator

Cum orice curbă are în punctele de curbură nenulă un cerc osculator, este interesant de studiat cum variază centrul cercului osculator cînd cînd un punct se mişcă de-a lungul curbei.

Definiţia 3.1. *Locul geometric al centrelor de curbură ale unei curbe plane* c *se numeşte* **evoluta** *lui* c. *Dacă* $\tilde{c}$ *este evoluta lui* c, *atunci* c *se numeşte* **involuta** *lui* $\tilde{c}$.

Exerciţiul 3.2. a*) Fie curba plană $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$. Determinaţi o scriere parametrică pentru evoluta lui c.

b) Arătaţi că astroida este evoluta elipsei. Căror puncte le corespund cele patru puncte de întoarcere ale astroidei? Pentru cerc ce se obţine?

c) Arătaţi că evoluta parabolei este parabola semi-cubică.

d) Arătaţi că evoluta unei cicloide este tot o cicloidă.

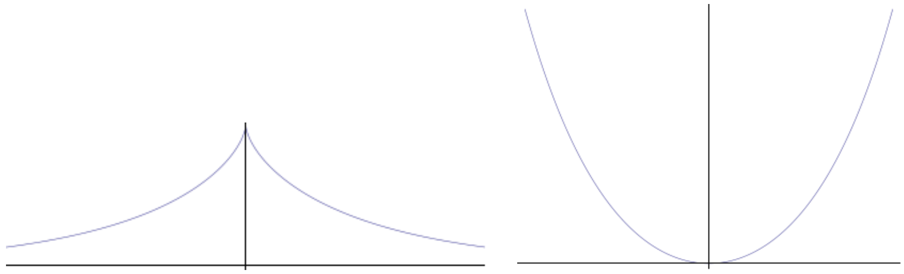
Exerciţiul 3.3. Fie curba $c : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ (numită tractrice) dată prin

$$x(t) = \sin(t), \qquad y(t) = \cos(t) + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right), \tag{3.10}$$

a) Arătaţi că lungimea segmentului determinat pe tangenta în $c(t)$ de $c(t)$ şi intersecţia cu axa Oy este constantă egală cu 1.

b) Arătaţi că evoluta tractricei este lănţişorul, curba de parametrizare

$$x(t) = t, \qquad y(t) = \operatorname{ch}(t). \tag{3.11}$$



(a) Tractricea (b) Lănţişorul

Fig. 3.5

Exerciţiul 3.4. Determinaţi involuta cercului.

Definiţia 3.2. *Spunem că două curbe* c_1 *şi* c_2*, fac unghiul* θ *într-un punct, regulat pentru ambele, în care se intersectează, dacă tangentele lor fac unghiul* θ*. Dacă două curbe au aceeaşi tangentă atunci se numesc* **curbe tangente**.

Definiţia 3.3. *Se numeşte* **înfăşurătoarea** *unei familii de curbe, o curbă tangentă la toţi membrii familiei.*

Dacă familia de curbe este dată ca o aplicaţie netedă $F(x, y, t)$ cu fiecare membru C_t avînd ecuaţia $f_t(x, y) = F(x, y, t) = 0$, atunci înfăşurătoarea familiei este

$$\left\{(x, y)|\exists t \text{ astfel încît } F(x, y, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0\right\} \tag{3.12}$$

Exerciţiul 3.5. Arătaţi că evoluta unei curbe este înfăşurătoarea normalelor curbei.

Definiţia 3.4. *Fie* c *o curbă regulată. Se numeşte* **curbă paralelă** *cu* c*, înfăşurătoarea unei familii de cercuri (de raze egale) cu centrele pe curba* c*.*

Exerciţiul 3.6. a) Determinaţi curbele paralele cu o elipsă dată.

b) Arătaţi că punctele în care o curbă paralelă cu c intersectează evoluta lui c sînt puncte de întoarcere.

Exerciţiul 3.7. Fie curba strîmbă de parametrizare

$$x(t) = \frac{1}{2}r(1 + \cos(\theta))\cos(t) - \frac{1}{2}r(1 - \cos(\theta))\cos\left(\frac{1 + \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)}t\right)$$
$$y(t) = \frac{1}{2}r(1 + \cos(\theta))\sin(t) - \frac{1}{2}r(1 - \cos(\theta))\sin\left(\frac{1 + \cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)}t\right)$$
$$z(t) = r \cdot \sin(\theta)\cos\left(\frac{\cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)}t\right).$$

Arătaţi:

a) Vectorul tangent la curbă, face un unghi constant cu axa Oz (curba este o elice).

b) Imaginea curbei se află pe sfera de rază r (şi centrul în origine).

Lecţia 4

Teorema celor patru vîrfuri

Trecem acum la studiul geometriei globale a curbelor, anume considerăm acele proprietăţi ale întregii curbe. Teorema de astăzi ne va da o caracterizare a curburii pentru curbe plane, simple şi închise. Vom obţine astfel o obstrucţie pentru ca o funcţie să să fie funcţia curbură a unei astfel de curbe. Vom vedea mai tîrziu că această teoremă are aplicaţii importante în teoria suprafeţelor. Peste tot în această lecţie, vom considera intervalul I de forma $[0, l]$.

Teorema celor patru vîrfuri a fost demonstrată de Symada Mukhopadhyaya pentru curbe convexe (cazul tratat de noi) în anul 1908 şi pentru curbe simple închise arbitrare de Adolf Knesser în 1912.

Definiţia 4.1. *Fie* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *o curbă regulată. Spunem că* c *este* **simplă**, *dacă aplicaţia* $c|_{(a,b)}$ *este injectivă.* c *se numeşte* **închisă** *dacă* $c(a) = c(b)$.

Definiţia 4.2. *O curbă* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *se numeşte* **convexă**, *dacă pentru orice* $t \in [a, b]$ $c([a, b])$ *se află în acelaşi semiplan determinat de tangenta în* $c(t)$.

Definiţia 4.3. *Se numeşte vîrf al unei curbe* $c : I \to \mathbb{R}^2$, *un punct* $s \in I$ *pentru care* $\kappa'(s) = 0$.

Exemplul 4.1. Fie elipsa de parametrizare $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t)$. Curbura sa este

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Derivata acesteia este este

$$\kappa'(t) = \frac{3ab\,(-a^2 + b^2)\cos(t)\sin(t)}{(b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^{\frac{5}{2}}}.$$

Aceasta se anulează în patru puncte ($t = m\frac{\pi}{2}$ cu $m = 0, 1, 2, 3$) anume $(\pm a, 0)$ şi $(0, \pm b)$. Vom arăta că acest număr de vîrfuri este minim.

Cînd studiem o curbă plană închisă, parametrizată canonic, este util să studiem *indicatricea* curbei, anume curba descrisă de tangenta la curbă. Mai precis pentru curba $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(s) = (x(s), y(s))$ considerăm curba $t : I \to \mathbb{R}^2, t(s) = (x'(s), y'(s))$. Cum curba este parametrizată după lungimea arcului, imaginea lui t se află pe cercul de centru $(0,0)$ şi rază 1. Viteza indicatricei este

$$\frac{dt}{ds} = (x''(s), y''(s)) = c''(s) = \kappa \mathbf{n}. \tag{4.1}$$

Cum imaginea lui t se află pe cerc, putem pune $t(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$. Local, θ este o funcţie netedă, bine definită, prin

$$\theta(s) = \arctan\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right). \tag{4.2}$$

Atunci

$$\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}(\cos\theta(s), \sin\theta(s)) = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta) = \theta'\mathbf{n}. \tag{4.3}$$

Deci $\theta'(s) = \kappa(s)$. Global, definim

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(\tau)d\tau. \tag{4.4}$$

Cum

$$\theta' = \kappa = x'y'' - x''y' = \left(\arctan\frac{y'}{x'}\right)', \tag{4.5}$$

cele două definiţii ale lui θ coincid pînă la o constantă. $\theta(s)$ măsoară unghiul parcurs de tangenta $t(s)$ cînd c parcurge intervalul $(0, s)$. Cum curba este închisă, valoarea totală a acestui unghi este de forma $2\pi n$ cu n întreg. Adică

$$\int_0^l \kappa(s)ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi n. \tag{4.6}$$

Definiţia 4.4. n *se numeşte* **indicele de rotaţie** *al curbei* c.

Pentru o curbă închisă şi simplă avem

Teorema 4.1. *Indexul de roataţie a unei curbe închise este* ± 1, *după orientarea curbei.*

Teorema 4.2 (Teorema celor patru vîrfuri). *O curbă închisă, simplă şi convexă are cel puţin patru vîrfuri.*

Pentru a demonstra teorema vom avea nevoie de

Lema 4.1. *Fie* $c : [0, l] \to \mathbb{R}^2$, $c(s) = (x(s), y(s))$ *o curbă plană închisă, parametrizată după lungimea arcului, şi fie* A, B, C *numere reale oarecare. Atunci*

$$\int_0^l (Ax + By + C)\frac{d\kappa}{ds}ds = 0, \tag{4.7}$$

unde κ *este curbura lui* c.

Demonstraţie. Am văzut că există o funcţie $\theta : [0, l] \to \mathbb{R}$ astfel încît $x'(s) = \cos\theta(s)$ şi $y'(s) = \sin\theta(s)$. Cum $\kappa(s) = \theta'(s)$, atunci $x''(s) = -\kappa y'(s)$ şi $y''(s) = \kappa x'(s)$. Curba fiind închisă, avem

$$\int_0^l \kappa' ds = 0. \tag{4.8}$$

De asemenea $(x\kappa)' = x'\kappa + x\kappa' = y'' + x\kappa'$ şi $(\kappa y)' = \kappa' y + \kappa y' = -x'' + y\kappa'$. Avem

$$\int_0^l (x\kappa)' ds = 0 \text{ şi } \int_0^l (y\kappa)' ds = 0$$

deoarece $x\kappa$ şi $y\kappa$ au valori egale în capetele intervalului. Prin urmare

$$\int_0^l x\kappa' ds = -\int_0^l \kappa x' ds = -\int_0^l y''(s) ds = 0,$$
$$\int_0^l y\kappa' ds = -\int_0^l \kappa y' ds = \int_0^l x''(s) ds = 0.$$

De aici se obţine concluzia. □

Trecem acum la demonstrarea teoremei. Cum funcţia curbură $\kappa : [0, l] \to \mathbb{R}$ este continuă, iar intervalul $[0, l]$ este compact, aceasta are un maxim şi un minim pe care le atinge. Deci c are cel puţin două vîrfuri $c(s_1) = p$, $c(s_2) = q$. Fie L dreapta determinată de p şi q şi α şi β arcele determinate de L pe curbă. Aceste arce se află fiecare într-un semiplan relativ la L (adică tot α şi tot β se află de aceeaşi parte a lui L). Să presupunem că nu ar fi aşa. Fie r un alt punct în care α îl taie pe L. Cum p,q şi r sînt distincte şi curba este convexă, tangenta în p la c va coincide cu L. De asemenea din convexitate L este tangentă în p, q şi r. Acum luăm un punct în apropiere de p. Tangenta în acest punct va separa punctele q şi r, cu excepţia cazului cînd întregul segment pq este conţinut în curbă. Atunci $\kappa = 0$ în p şi q. Cum acestea sînt puncte de maxim şi minim rezultă că $\kappa \equiv 0$, contradicţie (κ este presupusă neconstantă).

Fie $Ax + By + C = 0$ ecuaţia dreptei L. Dacă nu există alt vîrf, atunci $\kappa'(s)$ are semn constant pe α şi pe β. Putem atunci alege coeficienţii A, B şi C astfel încît integrala (4.7) să fie pozitivă. Deci va trebui să mai existe un al treilea vîrf şi κ' îşi va schimba semnul pe unul dintre arce. Presupunem că este α. Cum punctele p şi q sînt unul de maxim, celălalt de minim, κ' schimbă semnul de două ori, deci mai avem un al patrulea vîrf. □.

După cum am menţionat la condiţia de convexitate se poate renunţa, dar atunci demonstraţia devine mult mai complicată (o demonstraţie se găseşte schiţată în [DGPV]). Este esenţial însă să avem o curbă simplă, după cum ne arată

Exemplul 4.2 ([DGPV]). Fie curba definită în coordonate polare prin $r = -1 - 2 \cdot \sin(\theta)$. Formula curburii este

$$\kappa(\theta) = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'2)^{\frac{3}{2}}},$$

r este văzut ca funcţie de θ. Astfel

$$\kappa(\theta) = \frac{5 - 4 \cdot \cos\theta - 4 \cdot \cos 2\theta + 6 \cdot \sin\theta}{2(5 + 4 \cdot \sin\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calculînd derivata acesteia obţinem că are doar două puncte în care se anulează, anume vîrfurile buclelor din Fig. 4.1

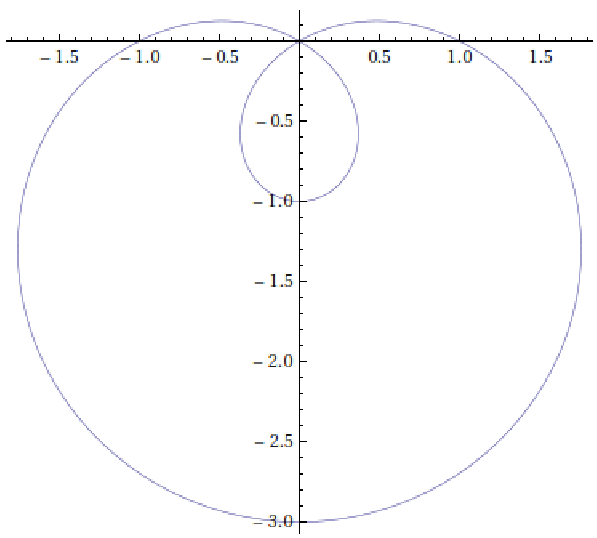


Fig. 4.1: O curbă cu două vîrfuri

Teorema reciprocă, anume

Teorema 4.3. *Fie* $\kappa : [0, l] \to \mathbb{R}$ *o funcţie cu* $\kappa(0) = \kappa(l)$ *de clasă* C^∞ *avînd două maxime şi două minime (sau identic egală cu o constantă nenulă). Atunci există o curbă simplă, închisă, pentru care* $\kappa(t)$ *este curbura în punctul* t.

a fost demonstrată pentru funcţii strict pozitive în 1971 de H.Gluck, iar în cazul general abia în 1997 (publicată abia în 2005 în [D], din cauza decesului autorului, B.Dahlberg).

Bibliografie

[D] Björn E. J. Dahlberg. The converse of the four vertex theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(7):2131--2135 (electronic), 2005.

[DGPV] Dennis DeTurck, Herman Gluck, Daniel Pomerleano, and David Shea Vick. The four vertex theorem and its converse. *Notices Amer. Math. Soc.*, 54(2):192--207, 2007.

Lecţia 5

Inegalitatea Izoperimetrică

O proprietate importantă a unei curbe simple închise este că împarte planul în două componente conexe numite impropriu interiorul, respectiv exteriorul curbei. Acesta este un rezultat datorat lui C. Jordan, chiar dacă intuitiv era cunoscut încă din antichitate. Pornind de aici geometri greci au pus următoarea problemă : **Dintre toate curbele simple închise de lungime fixă l, care mărgineşte cea mai mare arie?**. Răspunsul, anume cercul, a fost de asemenea cunoscut de antici, după cum vedem din legenda întemeierii Cartaginei, povsetită de poetul Virgiliu. O demonstraţie riguroasă a acestui fapt a fost dată în 1870 de K.Weierstrass, privind problema în context variaţional. Apoi au fost date şi demonstraţii mai simple, relativ elementare.

Pentru început vom găsi o formulă pentru aria unui domeniu mărginit de o curbă simplă închisă şi pozitiv orientată $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. După cum se ştie

$$A = \int\int_D dxdy.$$

Vom aplica formula lui Green

$$\int\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} (f\frac{dy}{dt} - g\frac{dx}{dt})dt.$$

În cazul nostru ∂D este imaginea curbei c. Atunci luăm $f(x, y) = x$ şi $g(x, y) = -y$. Atunci

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b (x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt})dt = \frac{1}{2}(xy\Big|_a^b - \int_a^b \frac{dx}{dt}y dt - \int_a^b \frac{dx}{dt}y dt). \tag{5.1}$$

Cum c este o curbă închisă, avem că

$$A = -\int_a^b yx'dt. \tag{5.2}$$

Cum

$$\int_a^b x'y dt = \int_a^b (xy)'dt - \int_a^b xy'dt = -\int_a^b xy'dt. \tag{5.3}$$

Deci

$$A = -\int_a^b yx'dt = \int_a^b xy'dt = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - x'y)dt. \tag{5.4}$$

Vom folosi aceste formule pentru a demonstra

Teorema 5.1 (Inegalitatea izoperimetrică). *Fie* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *o curbă simplă închisă de lungime* l, *şi fie* A *aria domeniului mărginit de* c. *Atunci*

$$l^2 - 4\pi A \geqslant 0, \tag{5.5}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă c *este un cerc.*

Demonstraţie. Fie două drepte e şi E' care n-o taie pe c. Le apropiem pînă ating curba. Se obţin două paralele L şi L' tangente la curbă, care este conţinută în banda delimitată de cele două drepte. Considerăm un cerc tangent la cele două drepte şi care nu intersectează curba. Fie O centrul cercului. Alegem un sistem de coordonate astfel încît O este originea sa, axa Oy este paralelă cu L şi axa Ox este perpendiculară pe aceasta.

Parametrizăm curba după lungimea arcului $c(s) = (x(s), y(s))$ astfel încît este pozitiv orientat şi punctele de tangenţă sînt $s = 0$ şi $s = s_1$. Putem presupune că cercul are parametrizarea $c(s) = (x(s), \tilde{y}(s))$, $s \in (0, l)$. Aria limitată de cerc este

$$\tilde{A} = \pi r^2 = -\int_0^l \tilde{y}x'ds, \tag{5.6}$$

iar cea limitată de curbă este

$$A = \int_0^l xy'ds. \tag{5.7}$$

Deci

$$A + \pi r^2 = \int_0^l (xy' - \tilde{y}x')ds \leqslant \int_0^l \sqrt{(xy' - \tilde{y}x')^2}ds \leqslant \int_0^l \sqrt{(x^2 + \tilde{y}^2)((x')^2 + (y')^2)}ds =$$
$$= \int_0^l \sqrt{x^2 + \tilde{y}^2}ds = lr.$$

Inegaliatea mediilor, anume $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, cu egalitate numai dacă sînt egale, ne spune că

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leqslant \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leqslant \frac{1}{2}lr. \tag{5.8}$$

Adică

$$4\pi A r^2 \leqslant l^2 r^2. \tag{5.9}$$

De unde se obţine inegalitatea din concluzie.

Presupunem acum că $4\pi A = l^2$. Atunci peste tot va trebui să avem egalităţi peste tot în particular în ecuaţia (5.8). Deci $A = \pi r^2$. Astfel $l = 2\pi r$ şi r nu depinde de alegerea direcţiei lui L. Mai mult avem

$$(xy' - \tilde{y}x')^2 = (x^2 + \tilde{y}^2)\left((x')^2 + (y')^2\right), \tag{5.10}$$

adică

$$(xx' + \tilde{y}y')^2 = 0. \tag{5.11}$$

Prin urmare

$$\frac{x}{y'} = -\frac{\tilde{y}}{x'} = \frac{\sqrt{x^2 + \tilde{y}^2}}{\sqrt{(y')^2 + (x')^2}} = \pm r. \tag{5.12}$$

Deci $x = \pm r y'$. Cum r nu depinde de alegerea lui L putem permuta între ei pe x şi y. Atunci $y = \pm r x'$. Deci

$$x^2 + y^2 = r^2\left((x')^2 + (y')^2\right) = r^2. \tag{5.13}$$

Astfel obţinem că c este un cerc. □

5.1 Probleme

Exerciţiul 5.1. Fie a, b, c, d lungimile laturilor unui patrulater. Arătaţi că dintre toate patrulaterele avînd laturile de aceste lungimi cel care are aria maximă este patrulaterul inscriptibil.

Exerciţiul 5.2 (Problema reginei Didona). Fie $c : [0, a] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$ o curbă netedă cu $y(0) = y(a) = 0$. Considerăm domeniul mărginit de curbă şi de axa Ox. Arătaţi că domeniul de arie maximă este cel obţinut cînd c este cerc.

Lecția 6

Suprafețe. Introducere

Curbele au fost privite mai ales ca imagini ale unor aplicații de la un interval I la $\mathbf{R}^2$ sau $\mathbf{R}^3$. Pentru suprafețe însă, o astfel de abordare este mult mai dificilă, mai ales că de cele mai multe ori este imposibil să găsim o aplicație a cărei imagine să fie o suprafață dată. De asemenea astfel de aplicații vor fi funcții de la un domeniu al lui $\mathbb{R}^2$ la $\mathbb{R}^3$, a căror studiu este mai dificil, decît cel al aplicaților de o varibilă reală. Astfel ne este mai comod să definim o suprafață ca pe o submulțime a spațiului euclidian împreună cu o structură suplimentară. Astfel avem

Definiţia 6.1. *O submulțime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numește suprafață regulată dacă orice punct $p \in S$ are o vecinătate $V \subset \mathbb{R}^3$ pentru care există o aplicație $\mathbf{r} : U \to V \cap S$ de la o mulțime deschisă $U \subset \mathbb{R}^2$ astfel încît*

1. $\mathbf{r}$ *este diferențiabilă. Adică dacă scriem*

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \text{ cu } (u, v) \in U,$$

funcțiile x, y, z au derivatele parțiale de orice ordin continue pe U.

2. $\mathbf{r}$ *este un homeomorfism, adică $\mathbf{r}^{-1} : V \cap S \to U$ există și este continuă, cu alte cuvinte $\mathbf{r}^{-1}$ este restricția unei aplicații $F : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, cu W deschisă și $V \cap S \subset W$.*

3. *Pentru orice $q \in U$, derivata $\mathbf{dr}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ este injectivă.*

Aplicația $\mathbf{r}$ se numește **parametrizare locală** sau **sistem de coordonate locale** într-o vecinătate a lui p. Să privim mai atent condiția 3. din definiție. După cum se știe de la Analiză, dacă luăm bazele canonice $\{e_1, e_2\}$ din $\mathbb{R}^2$, respectiv $\{f_1, f_2, f_3\}$ din $\mathbb{R}^3$ matricea aplicației liniare $\mathbf{dr}_q$ este

$$\mathbf{dr}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Prin urmare condiția că $\mathbf{dr}_q$ este injectivă este echivalentă cu cea ca rangul matricei (6.1) să fie maxim (=2).

Injectivitatea din condiția 2. previne ca suprafața să aibă puncte de auto-intersecție, iar 3. previne existența punctelor singulare de tipul vîrfului conului.

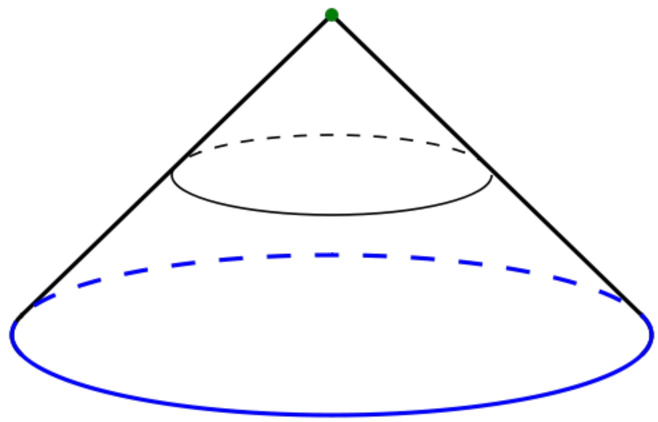


Fig. 6.1

Acestea ne asigură că putem defini în fiecare punct **planul tangent**. Continuitatea inversei în condiția 2. ne este necesară pentru ca anumite obiecte și proprietăți nu depind de alegerea parametrizării.

În practică este destul de greu să găsim în mod explicit cîte o parametrizare locală pentru fiecare punct al unei suprafețe. De aceea vom da două caracterizări echivalente pentru o suprafață, una locală și una globală. Local avem

Propoziţia 6.1. *Fie* $f : U \to \mathbb{R}$ *o funcție diferențiabilă pe o submulțime deschisă a lui* $\mathbb{R}^2$. *Atunci graficul său, submulțimea* S *a lui* $\mathbb{R}^3$ *cu elementele* $(x, y, f(x, y))$, *pentru* $(x, y) \in U$ *este o suprafață regulată.*

Demonstrație. Considerăm aplicația $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Vom arăta că este o parametrizare. Evident condiția 1. este satisfăcută. Pentru condiția 3. observăm că matricea Jacobiană a lui $\mathbf{r}$ este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

și deci derivata sa este injectivă peste tot U. Pentru a vedea condiția 2.. Observăm că orice punct $(x, y, z) \in S$ este imaginea prin $\mathbf{r}$ a unicului punct $(x, y) = (u, v)$. Deci inversa lui $\mathbf{r}$ este proiecția $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pe primele două componente. În mod evident această aplicație este continuă. □

Pentru caracterizarea globală vom avea nevoie de o noțiune importantă în sine

Definiţia 6.2. *Fie* $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$*, o aplicație diferențiabilă. Spunem că un punct* $p \in U$ *este* **punct critic** *al lui* F*, dacă diferențiala* dF_p *nu are rang maxim. Imaginea sa* $F(p)$ *se numește* **valoare critică**. *Un punct din* $\mathbb{R}^n$ *care nu este valoare critică se numește* **valoare regulată**.

Noțiunea este motivată de situația funcțiilor $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un punct $x \in U$ va fi punct critic dacă $f'(x) = 0$, adică derivata va duce toți vectorii tangenți în vectorul nul.

Pentru o funcție $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derivata df_p va avea, în baza canonică (e_1, e_2, e_3), matricea (f_x, f_y, f_z). Deci rangul ei poate fi 1 sau 0. Astfel un punct $a \in \mathbb{R}$ va fi valoare critică dacă și numai dacă toate derivatele parțiale f_x, f_y, f_z se anulează în fiecare punct al mulțimii

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U | f(x, y, z) = a\}.$$

Propoziţia 6.2. *Dacă* $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *este o funcție diferențiabilă și* $a \in f(U)$ *este o valoare regulată, atunci* $f^{-1}(a)$ *este o suprafață regulată în* $\mathbb{R}^3$*.*

Demonstrație. Fie $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$. a este valoare regulată și putem presupune (eventual schimbînd axele de coordonate între ele) că $f_z \neq 0$ în p. Fie $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Vom nota cu (u, v, t) coordonatele pe $\mathbb{R}^3$ (codomeniul lui F). Derivata lui F în p are matricea

$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

deci $\det(dF_p) = f_z \neq 0$.

Aplicăm teorema funcției inverse și obținem că există o vecinătate V a lui p și o vecinătate W a lui $F(p)$ astfel încît $F : V \to W$ este inversabilă și inversa $F^{-1} : W \to V$ este diferențiabilă. Avem că F^{-1} este de forma

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \tag{6.4}$$

cu g derivabilă. Avem că $t = a$, deci funcția $h(x, y) = g(u, v, a)$ este derivabilă pe proiecția lui V pe planul xOy. Dar $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t) | t = a\}$. Deci $f^{-1}(a) \cap V$ este graficul lui h. Conform propoziției 6.1 avem că $f^{-1}(a) \cap V$ este o vecinătate de coordonate a lui p. Cum pentru orice $p \in f^{-1}(a)$ găsim o astfel de vecinătate de coordonate obținem că $f^{-1}(a)$ este suprafață regulată. □

Exemplul 6.1. Elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

este suprafață regulată.

Într-adevăr, elipsoidul este $f^{-1}(1)$, pentru $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Avem că $f_x = 2\frac{x}{a^2}$, $f_y = 2\frac{y}{b^2}$ şi $f_z = 2\frac{z}{c^2}$. Acestea nu se anulează concomitent decît în $(0,0,0)$ care nu apartține lui $f^{-1}(1)$.

Exemplul 6.2. Hiperboloidul cu două pînze este o suprafață regulată $S = f^{-1}(0)$, pentru $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$. Se observă că S nu este conexă, căci nu există o curbă care să unească un punct cu $z < 0$ și unul cu $z > 0$.

Exemplul 6.3. Torul T este suprafața descrisă de un cerc de rază r care se rotește în jurul unei axe din planul său și aflate la o distanță $R > r$ de centrul său.

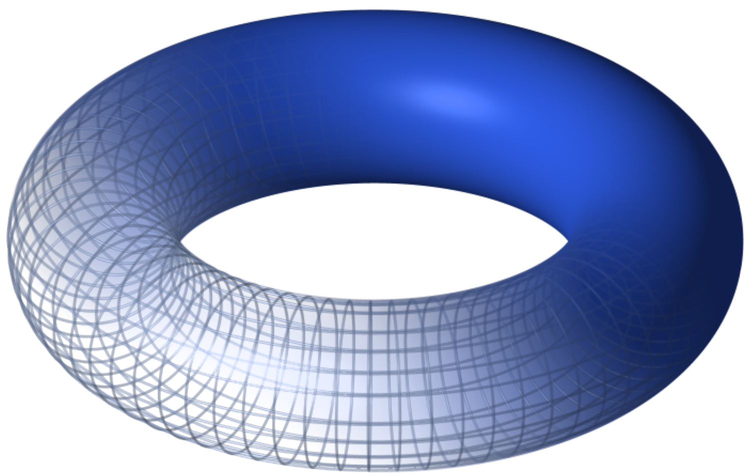


Fig. 6.2

Presupunem că cercul se află în planul yOz cu centrul $(0, R, 0)$. Atunci ecuația lui va fi $(y - R)^2 + z^2 = r^2$. Rotind cercul în jurul axei Oz obținem că punctele sale satisfac ecuația

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2.$$

Deci T este preimaginea lui r^2 prin funcția $f(x,y,z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2$. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Toate derivatele se anulează doar pentru $(0,0,0)$, care nu aparține lui $f^{-1}(r^2)$. Deci T este o suprafață regulată.

Am văzut că graficul unei funcții diferențiabile este o suprafață regulată. Următorul rezultat ne spune că local și reciproca este valabilă.

Propoziţia 6.3. *Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață regulată și $p \in S$. Atunci există o vecinătate V a lui p în S astfel încît V este graficul unei funcții de forma $z = f(x, y), y = g(x, z)$ sau $x = h(x, y)$.*

Demonstrație. Fie $\mathbf{r} : U \to S$ o parametrizare a lui p pe S. Scriem $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v).y(u, v), z(u, v))$. Atunci unul din minorii de ordin 2 ai matricei derivatei lui $\mathbf{r}$ are determinantul nenul în $q = \mathbf{r}^{-1}(p)$. Presupunem $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$. Considerăm aplicația $\pi \circ \mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^2$, unde $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Atunci $\pi \circ \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Aplicăm teorema funcției inverse și obținem că există o vecinătate V_1 a lui q și o vecinătate V_2 a lui $\pi \circ \mathbf{r}(q)$ astfel încît $\pi \circ \mathbf{r}$ este difeomorfism de la V_1 la V_2. Deci π restrînsă la $V = \mathbf{r}(V_1)$ este injectivă și există o inversă $(\pi \circ \mathbf{r})^{-1} : V_2 \to V_1$. Cum $\mathbf{r}$ este homeomorfism V este o vecinătate a lui p în S. Compunînd $(\pi \circ \mathbf{r})^{-1} : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ cu $(u, v) \mapsto z(u, v)$ găsim că V este graficul funcției $z = z\,(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$.

Cazurile celelalte se tratează analog. □

Dacă știm că S este o suprafață regulată și avem un candidat pentru o parametrizare locală $\mathbf{r}$ rezultatul următor ne spune că nu mai trebuie să cercetăm dacă $\mathbf{r}^{-1}$ este continuă, atît timp cît $\mathbf{r}$ satisface celelalte condiții.

Propoziţia 6.4. *Fie $p \in S$ un punct pe o suprafață regulată S și $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ o aplicație cu $p \in \mathbf{r}(U) \subset S$ care satisface condițiile 1. și 3. din definiția 6.1. Presupunem că $\mathbf{r}$ este injectivă. Atunci $\mathbf{r}^{-1}$ este continuă.*

Demonstrație. Fie $q \in \mathbf{r}(U)$. Cum S este regulată, există o vecinătate $W \subset S$ a lui q care este graficul unei funcții definite pe o mulțime deschisă V din xOy. Fie $N = \mathbf{r}^{-1}(W) \subset U$ și fie $h = \pi \circ \mathbf{r} : N \to V$, unde π este proiecția pe primele două componente. Atunci $dh = \pi \circ d\mathbf{r}$ este nesingulară în $r = \mathbf{r}^{-1}(q)$. Din teorema funcției inverse există $\Omega \subset N$ astfel încît $h : \Omega \to h(\Omega)$ este difeomorfism. $\mathbf{r}(\Omega)$ este deschisă în S și $\mathbf{r}^{-1} = h^{-1} \circ \pi$ este compunerea unor funcții continue. Deci $\mathbf{r}^{-1}$ este continuă în q. Cum q era arbitrar, rezultă că $\mathbf{r}^{-1}$ este continuă pe $\mathbf{r}(\Omega)$. □

6.1 Probleme

Exerciţiul 6.1.

1. Fie sfera $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Arătați că aplicația $\mathbf{r} : U \to S^2$, $\mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\right)$ definită pe $U = \{(x, y) | x^2 + y^2 < R^2\}$ este o parametrizare locală. Determinați imaginea lui $\mathbf{r}$ și acoperiți sfera cu astfel de parametrizări.

2. Fie aplicația $\mathbf{r} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R sin\theta cos\varphi, R sin\theta sin\varphi, R cos\theta)$. Arătați că $\mathbf{r}$ este o parametrizare locală a sferei și acoperiți sfera cu astfel de parametrizări.

3. Fie $N = (0, 0, R)$ și fie aplicația $h : U = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\} \to S^2$ definită prin $h(P) = NP \cap S^2$. Arătați că h este o parametrizare locală a lui S^2 (identificăm U cu $\mathbb{R}^2$). Determinați o acoperire a lui S^2 cu astfel de parametrizări.

Exercițiul 6.2. Fie aplicația $\mathbf{r} : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u) .$$

Arătați că este o parametrizare locală pentru tor. Cu cîte astfel de parametrizări poate fi acoperit acesta?

Lecția 7

Suprafețe. Teorie locală I

7.1 Planul tangent

Această lecție se bazează în mare parte pe [Post].Ca și în cazul curbelor o primă întrebare care apare este cînd două parameterizări definesc aceeași suprafață. Avem

Definiţia 7.1. *Spunem că două parametrizări* $\mathbf{r} : U \to S$ *și* $\mathbf{r}^* : U^* \to S$ *sînt echivalente, dacă există un difeomorfism* $\varphi : U^* \to U$ *astfel încît* $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} \circ \varphi$*.*

În mod evident două parameterizări echivalente vor avea aceeași imagine. Pe de altă parte, dacă două parameterizări au aceeași imagine, se poate arăta că sînt echivalente.

Fie acum o suprafață s și o parametrizare locală $\mathbf{r} : U \to S$ în vecinătatea unui punct $p = \mathbf{r}(u_0, v_0) \in S$. Atunci

$$\mathbf{r}_{u_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0), \quad \mathbf{r}_{v_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

sînt liniar-independenți (prin definiția parameterizării). Prin urmare există produsul lor vectorial

$$\mathbf{r}_{u_0} \times \mathbf{r}_{v_0}.$$

Acest vector determină un plan ortogonal pe el și care trece prin punctul p. Avem

Definiţia 7.2. *Subspațiul vectorial generat de vectorii* $\mathbf{r}_{u_0}$ *și* $\mathbf{r}_{v_0}$ *(și prin urmare ortogonal pe produsul lor vectorial) se numește* **spațiul tangent** *în* p *la* S *și va fi notat cu* $\mathbf{T}_pS$*. Cum dimensiunea sa este* 2*, adesea îl vom numi* **planul tangent** *în* p *la* S*.*

Dacă $\mathbf{r} : U \to S$ este o parametrizare locală, cu $U \subset \mathbb{R}^2$, atunci imaginea unei curbe din U prin $\mathbf{r}$ se va numi curbă pe suprafața S. Dacă avem o astfel de curbă $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ cu $\mathbf{r}(t_0) = p_0$ atunci

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)\Big|_{t=t_0} = u'(t_0)\mathbf{r}_{u_0} + v'(t_0)\mathbf{r}_{v_0}$$

aparține lui $\mathbf{T}_p S$. Reciproc pentru orice vector $a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v$ din $\mathbf{T}_p S$ putem considera curba din U de ecuații parametrice

$$u = u_0 + at,$$
$$v = v_0 + bt,$$

cu $t \in I$, I fiind ales astfel încît $(u_0 + at, v = v_0 + bt) \in U$, pentru orice $t \in I$. În concluzie planul tangent este format din vectorii viteză ai curbelor care trec prin p.

Să vedem cum se comportă planul tangent la o schimbare de parametrizare. O astfel de schimbare se scrie

$$\mathbf{r}^*(u^*, v^*) = \mathbf{r}\left(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*)\right). \tag{7.1}$$

Derivînd obținem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*_{u^*} &= \frac{\partial u}{\partial u^*}\mathbf{r}_u + \frac{\partial v}{\partial u^*}\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}^*_{v^*} &= \frac{\partial u}{\partial v^*}\mathbf{r}_u + \frac{\partial v}{\partial v^*}\mathbf{r}_v. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Deci vectorii $\mathbf{r}_{u^*}$ și $\mathbf{r}_{v^*}$ aparțin lui $\mathbf{T}_p S$ și cum sînt de asemenea liniar-independenți formează o bază a acestuia. Am obținut astfel că la o schimbare de parametrizare corespunde o schimbare de bază în $\mathbf{T}_p S$. Deci spațiul vectorial $\mathbf{T}_p S$ **nu depinde de parametrizarea suprafeței**.

Vectorii lui $\mathbf{T}_p S$ vor fi notați cu $d\mathbf{r}$, componentele lor în baza $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ fiind notate cu du, respectiv dv. Astfel $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$. Notația este motivată de faptul că du și dv sînt legate de du^*, respectiv dv^* prin formulele

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial u^*}du^* + \frac{\partial v}{\partial u^*}dv^* \\ dv &= \frac{\partial u}{\partial v^*}du^* + \frac{\partial v}{\partial v^*}dv^*, \end{aligned} \tag{7.3}$$

care se obțin din formulele (7.2).

Dacă suprafața S este preimaginea unei valori regulate pentru o funcție $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, avem următoarea caracterizare a planului tangent.

Propoziţia 7.1. *Fie* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *o funcție netedă,* a *o valoare regulată,* $S = f^{-1}(a)$ *o suprafață regulată și* $p \in S$*. Atunci*

$$\mathbf{T}_p S = \mathrm{Ker}(df_p). \tag{7.4}$$

Demonstrație. Din propoziția 6.2 rezultă că există o parametrizare locală $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^2$ în jurul lui $p \in S$. Aplicația $U \in (u, v) \mapsto f\left(\mathbf{r}(u, v)\right)$ este constantă. Prin urmare

$$\frac{\partial}{\partial u} f\left(\mathbf{r}(u, v)\right) \equiv 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial v} f\left(\mathbf{r}(u, v)\right) \equiv 0.$$

Dacă $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Deci $df_p(\mathbf{r}_u) = \langle \nabla f(p), \mathbf{r}_u\rangle = 0$ și $df_p(\mathbf{r}_v) = \langle \nabla f(p), \mathbf{r}_v\rangle = 0$. Prin urmare $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \in \mathrm{Ker}(df_p)$. Cum acești vectori formează o bază a lui $\mathbf{T}_pS$ avem că $\mathbf{T}_pS \subset \mathrm{Ker}(df_p)$. Dimensiunile celor două spații sînt 2 pentru $\mathbf{T}_pS$ și $3-1=2$ pentru $\mathrm{Ker}(df_p)$. Deci aceste spații coincid.□

Exercițiul 7.1. 1. Calculați planul tangent într-un punct al sferei folosind atît parametrizarea locală cît și funcția a cărei anulare o definește.

2. Aceași cerință pentru tor.

După cum se știe (și am folosit adesea) diferențiala unei aplicații între spații numerice este o aplicație liniară. Cu ajutorul planelor tangente putem defini diferențiala unei aplicații între două suprafețe.

Fie acum două suprafețe S și $\hat{S}$, cu parameterizările locale $\mathbf{r} : U \to S$, respectiv $\hat{\mathbf{r}} : \hat{U} \to \hat{S}$. Cum parameterizările sînt aplicații injective orice aplicație $f : S \to \hat{S}$ va induce o aplicație $\bar{f} : U \to \hat{U}$ prin diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] & \hat{S} \\ U \arrow[u, "\mathbf{r}"] \arrow[r, "\bar{f}"] & \hat{U} \arrow[u, "\hat{\mathbf{r}}"'] \end{tikzcd} \tag{7.5}$$

adică $f \circ \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} \circ \bar{f}$. Spunem că $\bar{f}$ reprezintă aplicația f în parameterizările $\mathbf{r}$ și $\hat{\mathbf{r}}$.

Funcțiile $\hat{u} = \hat{u}(u,v)$ și $\hat{v} = \hat{v}(u,v)$, componentele lui $\bar{f}$, spunem că reprezintă f în coordonatele u, v, respectiv u^*, v^*. Prin definiție f este diferențiabilă, dacă $\bar{f}$ este diferențiabilă. Această definiție nu depinde de parameterizările alese.

Pentru a defini diferențiala lui f într-un punct vom folosi descrierea lui $\mathbf{T}_pS$ ca spațiul vectorilor tangenți la curbele conținute în suprafață. Fie $p \in S$ și $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ cu $c(0) = p$, $c(t) = ((u(t), v(t))$. Atunci vectorul său viteză în p va fi

$$c'(0) = u'(0)\mathbf{r}_u + v'(0)\mathbf{r}_v. \tag{7.6}$$

Definiţia 7.3. *Fie S_1 și S_2 două suprafețe, $p \in S_1$ și $f : S_1 \to S_2$ o aplicație diferențiabilă. Fie $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \in \mathbf{T}_pS_1$, dat de o curbă $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ cu $c(0) = p$. Atunci*

$$df_p(d\mathbf{r}) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}. \tag{7.7}$$

Mai precis, dacă $\hat{\mathbf{r}}$ va fi o parametrizare locală în jurul lui $\hat{p} = f(p)$, atunci $t \mapsto (f \circ c)(t)$ va fi o curbă pe S_2, iar vectorul său viteză în 0 va aparține lui $\mathbf{T}_{\hat{p}}S_2$.

Teorema 7.1. *Pentru orice* $p \in S_1$*, aplicația* $df_p : \mathbf{T}_p S_1 \to \mathbf{T}_{\hat{p}} S_2$ *este liniară.*

Exercițiul 7.2. Fie S o suprafață regulată. Fie de asemenea $q \notin S$ și funcțiile $f : S \to \mathbb{R}$, $F : S \to \mathbb{R}$, definite prin $f(p) = |q_0 - p|$ și $F(p) = |q_0 - p|^2$. Calculați df_p, dF_p și determinați punctele critice ale acestora.

Demonstrație. Exercițiu! (Folosiți aplicația asociată lui f). $\square$.

7.2 Prima formă fundamentală

Planul tangent este un subspațiu vectorial al spațiului euclidian $\mathbb{R}^3$ astfel că produsul scalar canonic $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se restrînge la un produs scalar (adică o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită) pe acesta. Pătratul lungimii unui vector tangent $\mathbf{r} = r_u du + r_v dv$ va fi

$$|d\mathbf{r}|^2 = (du)^2 |\mathbf{r}_u|^2 + 2du dv \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle + (dv)^2 |dr_v|^2. \tag{7.8}$$

Deci forma obținută (noatată I) este determinată de coeficienții

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle \\ F(u,v) &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle \\ G(u,v) &= \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle \end{aligned}$$

Se observă că E, F și G depind în mod neted de (u, v).

Exercițiul 7.3. Calculați prima formă fundamentală pentru sfera parametrizată prin

$$\mathbf{r}(u,v) = (R\cos u \cos v, R\cos u \sin v, R\sin u)$$

și prin proiecția stereografică.

Tradițional, scriem $d\mathbf{r}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, pentru forma pătratică asociată. Lungimea unei curbe $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ pe suprafață va fi

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2} dt. \tag{7.9}$$

Această formulă se scrie în mod tradițional $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, adică prima formă fundamentală dă pătratul elementului de lungime.

Cum $(\mathbf{T}_p S, I)$ este un spațiu euclidian, putem calcula unghiul a doi vectori. Fie vectorii tangenți $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_u du_1 + \mathbf{r}_v dv_1$ și $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_u du_2 + \mathbf{r}_v dv_2$. Atunci

$$\cos\theta = \frac{\langle d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2 \rangle}{|d\mathbf{r}_1| \cdot |d\mathbf{r}_2|}, \tag{7.10}$$

adică

$$\cos\theta = \frac{E du_1 du_2 + F(du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2}{\sqrt{E du_1^2 + 2F du_1 dv_1 + G dv_1^2}\sqrt{E du_2^2 + 2F du_2 dv_2 + G dv_2^2}} \tag{7.11}$$

Unghiul făcut de doi vectori tangenți, corespunzători la două curbe care se intersectează în p, se numește unghiul celor două curbe în p. Am văzut că acesta se calculează cu ajutorul primei forme fundamentale.

În concluzie **prima formă fundamentală permite calculul lungimilor și unghiurilor pe o suprafață.**

După cum se știe, aria paralelogramului determinat de vectorii $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ este $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$. Definim aria unei porțiuni R de pe suprafața S conținută în imaginea unei parameterizări $\mathbf{r} : U \to S$ prin

$$A(R) = \int\int_Q |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv, \tag{7.12}$$

unde $Q = \mathbf{r}^{-1}(R)$.

Se poate arăta că aceasta nu depinde de parametrizare. Folosind formula $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle^2 = |\mathbf{r}_u|^2 \cdot |\mathbf{r}_v|^2$ se obține că

$$A(R) = \int\int_Q \sqrt{EG - F^2} du dv. \tag{7.13}$$

Deci prima formă fundamentală a unei suprafețe, determină și ariile pe suprafață.

7.3 Exerciții

Exercițiul 7.4. Determinați cum se transformă coeficienții E, F, G ai primei forme fundamentale cînd se schimbă parametrizarea suprafeței.

Exercițiul 7.5 (Suprafețe de rotație). Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață obținută prin rotația unei curbe plane C în jurul unei drepte din planul ei, care nu intersectează curba. Dacă presupunem că C este în planul xOz și axa sa este axa Oz, C avînd parametrizarea $x = f(v), y = g(v)$ cu $f(v) > 0$, atunci suprafața de rotație are parametrizarea $\mathbf{r}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$.

1. Arătați că se obține o suprafață regulată;

2. Calculați planul tangent și prima formă fundamentală a lui S.

Exercițiul 7.6. Fie $c : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă regulată, parametrizată canonic. Definim

$$\mathbf{r}(t, v) = c(t) + v c'(t), \tag{7.14}$$

pentru $(t, v) \in I \times \mathbb{R}$. Presupunem că c are curbura nenulă peste tot. Luăm $U = \{(t, v) \in I \times \mathbb{R} | v \neq 0\}$. Arătați $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ este o suprafață regulată. Calculați planul tangent într-un punct și prima formă fundamentală.

Bibliografie

[Post] M. Postnikov. *Smooth manifolds*. ``Mir'', Moscow, 1989. Lectures in geometry. Semester III, Translated from the Russian by Vladimir Shokurov.

Lecția 8

Teoria locală II. Curbura

Fie S o suprafață regulată, cu o parametrizare $\mathbf{r} : U \to S$. În orice punct al parametrizării avem vectorul normal

$$N(q) = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}, \tag{8.1}$$

obținînd astfel o aplicație $N : \mathbf{r}(U) \to \mathbb{R}^3$. Nu orice suprafață admite un cîmp continu de vectori normali. Un exemplu de suprafață care nu admite un astfel de cîmp este banda lui Möbius. Dacă o suprafață admite un cîmp global de vectori normali, aceasta se numește **orientabilă**. Evident suprafețele date de o singură parametrizare sînt orientabile, deci local, orice suparafață admite o orientare.

Definiţia 8.1. *Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafață orientabilă. Aplicația $N : S \to \mathbb{R}^3$, care ia valori în sfera unitate, se numește* **aplicația Gauss**.

Aplicația Gauss induce o orientare în fiecare plan tangent T_pS, declarînd ca pozitivă orice bază $\{v, w\}$ cu proprietatea că $\langle v \times w, N(p)\rangle$ este pozitiv.

Se vede cu ușurință că N este o aplicație diferențiabilă. dN_p este o aplicație liniară $T_pS \to T_{N(p)}S^2$, dar T_pS și $T_{N(p)}S^2$ coincid (au același complement ortogonal, anume pe $N(p)$). Deci dN_p poate fi considerată ca o aplicație liniară $T_pS \to T_pS$.

Ca să vedem cum lucrează dN_p, fie $t \mapsto \alpha(t)$ o curbă pe S și $N(t) = N \circ \alpha$, imaginea ei pe S^2, prin N. Atunci $\frac{dN}{dt}\big|_{t=0} = dN_p(\alpha'(0))$ este un vector în T_pS. Prin urmare dN_p măsoară felul în care se schimbă vectorul normal N, restrîns la curba $\alpha(t)$, față de $N(p)$. Astfel dN_p este oarecum analogul curburii din cazul curbelor.

Teorema 8.1. *Aplicația $dN_p : T_pS \to T_pS$ este aplicație liniară auto-adjunctă.*

Demonstrație. Avem de arătat că pentru o bază $\{w_1, w_2\}$ a lui T_pS avem

$$\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle. \tag{8.2}$$

Fie $\mathbf{r} : U \to S$ o parametrizare în jurul lui p și baza asociată $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ a lui T_pS. Dacă $\alpha(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ este o curbă pe S cu $\alpha(0) = p$. Atunci

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(\mathbf{r}_u u'(0) + \mathbf{r}_v v'(0)) = \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))\Big|_{t=0} = \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0); \end{aligned}$$

Deci $dN_p(\mathbf{r}_u) = N_u$ și $dN_p(\mathbf{r}_v) = N_v$. Astfel pentru a termina demonstrația avem de arătat că

$$\langle N_u, \mathbf{r}_v \rangle = \langle \mathbf{r}_u, N_v \rangle.$$

Cum $\langle N, \mathbf{r}_u \rangle = 0$ și $\langle N, \mathbf{r}_v \rangle = 0$, derivînd obținem

$$\begin{aligned} \langle N_v, \mathbf{r}_u \rangle + \langle N, \mathbf{r}_{uv} \rangle = 0, \\ \langle N_u, \mathbf{r}_v \rangle + \langle N, \mathbf{r}_{vu} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Deci

$$\langle N_u, \mathbf{r}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{r}_{uv} \rangle = \langle N_v, \mathbf{r}_u \rangle. \square$$

Cum dN_p este auto-adjunct (matricea sa este simetrică într-o bază), putem defini cu ajutorul ei o formă pătratică, $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ (semnul $-$ este ales pentru ca forma să fie pozitivă).

Vom da acum o interpretare gemetrică a formei a II-a. Pentru aceasta avem nevoie de cîteva noțiuni. Astfel

Definiţia 8.2. *Fie C o curbă regulată, conținută în S și care trece printr-un punct $p \in S$, k curbura sa în p. Considerăm unghiul θ făcut de vectorul său normal $\mathbf{n}$ cu $N(p)$ $(\cos\theta = \langle \mathbf{n}, N(p) \rangle)$. Se numește* **curbura normală** *a lui C în p, numărul $k_n = k \cos\theta$.*

Prin urmare curbura normală este lungimea proiecției lui $\mathbf{n}$ pe $N(p)$, cu semnul dat de orientarea lui N în p.

Fie acum o curbă $C \subset S$ o curbă de parametrizare $c(s)$, după lungimea arcului, astfel încît $c(0) = p$. Notăm cu $N(s) = N(c(s))$. Prin urmare $\langle N(s), c'(s) \rangle = 0$. Deci

$$\langle N(s), c''(s) \rangle = -\langle N'(s), c'(s) \rangle.$$

Avem astfel

$$\begin{aligned} II_p(c'(0)) &= -\langle dN_p\left(c'(0)\right), c'(0) \rangle = \langle N'(0), c'(0) \rangle = \langle N(0), c''(0) \rangle = \\ &= \langle N, k\mathbf{n} \rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

Prin urmare valoarea celei de-a doua forme fundamentale pe un vector din $v \in T_pS$ este curbura normală a curbei tangente la v. Am obținut astfel

Teorema 8.2 (J.B. Meusnier). *Toate curbele conținute în suprafața S, care trec prin același punct și au același vector tangent au aceeași curbură normală în acest punct.*

Acest rezultat ne permite să vorbim de curbura normală de-a lungul unei direcții prin p. Un vector de normă 1 $v \in T_pS$ și vectorul normal $N(p)$ determină un plan ortogonal pe T_pS. Intersecția lui cu suprafața S se numește **secțiune normală** de-a lungul lui v. Într-o vecinătate a lui p secțiunile normale sînt curbe plane, avînd vectorul normal egal cu $\pm N(p)$, deci curbura acestora coincide cu curbura normală.

Exercițiul 8.1. Fie suprafața de revoluție obținută prin rotirea curbei de ecuație $z = y^4$ în jurul axei Oz. Atunci pentru $p = (0,0,0)$, $dN_p = 0$.

Cum dN_p este aplicație ortogonală în fiecare p, atunci există o bază ortonormată a $\{e_1, e_2\}$ de vectori propri ai săi. Adică $dN_p(e_1) = -k_1e_1$ și $dN_p(e_2) = -k_2e_2$ cu $k_1 \geqslant k_2$ din interpretarea extremală a formelor pătratice ([S, §10.2]) k_1 și k_2 sînt maximul, respectiv minimul formei II_p restrînsă la cercul unitate din T_pS, deci sînt maximul, respectiv minimul curburii normale.

Definiţia 8.3. *Curbura normală maximă* k_1 *și cea minimă* k_2 *se numesc* **curburile principale** *ale lui* S *în* p*. Direcțiile proprii corespunzătoare (anume cele generate de* e_1*, respectiv* e_2*) se numesc* **direcțiile principale** *în* p.

Definiţia 8.4. *O curbă regulată, conexă* $C \subset S$ *cu proprietatea că pentru orice punct* $p \in C$*, tangenta în punctul respectiv este direcție principală se numește* **linie de curbură**.

Dacă știm curburile principale, este ușor să determinăm curbura normală pentru orice direcție din T_pS. Într-adevăr, fie $v \in T_pS$, de normă 1. Cum $\{e_1, e_2\}$ este o bază ortonormată, atunci $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ (unde θ este unghiul între e_1 și v). Curbura normală k_n este

$$\begin{aligned} k_n = II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle = -\langle dN_p(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2), \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\rangle = \\ = \langle k_1\cos\theta e_1 + k_2\sin\theta e_2, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\rangle = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta. \end{aligned}$$

Formula obținută (numită formula lui Euler) ne dă expresia formei a doua în raport cu reperul $\{e_1, e_2\}$.

Se știe că pentru o aplicație liniară diagonalizabilă (adică avînd două valori proprii distincte) între spații de dimensiune 2 determinantul este egal cu produsul valorilor propri, iar urma este egală cu suma acestora.

Definiţia 8.5. *Fie* S *o suprafață,* $p \in S$ *și* $dN_p : T_pS \to T_pS$ *aplicația Gauss cu valorile proprii* $-k_1, -k_2$*. Determinantul lui* dN_p *, egal cu* k_1k_2*, se numește* **curbura Gauss** *sau* **curbura totală** *a lui* S *în* p *și este notată cu* K*. Urma pe jumătate cu semnul* $-$ *a lui* dN_p*, se numește* **curbura medie** *și se notează cu* H.

Avem că

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Definiţia 8.6. *Un punct de pe o suparafață* S *se numește*

- *Eliptic dacă* $K > 0$*;*
- *Hiperbolic dacă* $K < 0$*;*
- *Parabolic dacă* $K = 0$ *și* $dN_p \neq 0$*;*
- *Planar dacă* $dN_p = 0$*;*

Într-un punct eliptic curbura totală este pozitivă, deci curburile principale au același semn, deci vectorii normali ai tuturor curbelor care trec prin p se află de aceeași parte a planului tangent.

Exerciţiul 8.2. Arătați că toate punctele sferei sînt eliptice. De asemenea punctul $(0, 0, 0)$ al paraboloidului $z = x^2 + ky^2$, $k > 0$ este punct eliptic.

Într-un punct hiperbolic curbura totală este negativă, deci curburile principale au semne opuse, deci vectorii normali ai curbelor care trec prin p se află de ambele părți ale planului tangent.

Exerciţiul 8.3. Punctul $(0, 0, 0)$ al paraboloidului hiperbolic $z = y^2 - x^2$ este punct hiperbolic.

Într-un punct parabolic curbura Gauss este 0, dar una din curburile principale este nenulă.

Exerciţiul 8.4. Arătați că punctele cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ sînt puncte puncte parabolice.

Într-un punct planar toate curburile principale sînt 0. De exemplu punctul considerat la Exercițiul 8.1 este planar.

Definiţia 8.7. *Dacă în* $p \in S$ $k_1 = k_2$ *atunci* p *se numește* **punct ombilical** *a lui* S*. În particular punctele planare sînt ombilicale.*

Exerciţiul 8.5. Să se arate că punctul $(0, 0, 0)$ al paraboloidului $z = x^2 + y^2$ este un punct ombilical neplanar.

Propoziţia 8.1. *Dacă toate punctele unei suprafețe conexe* S *sînt puncte ombilicale atunci* S *este conținută într-o sferă sau într-un plan.*

Demonstrație. Fie $p \in S$ și $\mathbf{r}(u, v)$ o parametrizare în jurul lui p cu imaginea V conexă.

Cum orice punct $q \in V$ este ombilical atunci pentru orice vector $w = a_1\mathbf{r}_u + a_2\mathbf{r}_v$ în T_qS, $dN(w) = \lambda(q)w$, unde $\lambda(q)$ este o funcție reală pe V.

Arătăm că λ este constantă pe V. Avem

$$a_1N_u + a_2N_v = \lambda(a_1\mathbf{r}_u + a_2\mathbf{r}_v);$$

Cum w era oarecare obinem că

$$N_u = \lambda\mathbf{r}_u,$$
$$N_v = \lambda\mathbf{r}_v.$$

Derivăm prima ecuație în raport cu v, pe a doua în raport cu u, scădem și obținem

$$\lambda_u\mathbf{r}_v - \lambda_v\mathbf{r}_u = 0.$$

Cum $\mathbf{r}_u$ și $\mathbf{r}_v$ sînt liniar independenți obținem că $\lambda_u = \lambda_v = 0$. pentru orice $q \in V$. Cum V este conexă rezultă că λ este constantă.

Dacă $\lambda \equiv 0$, atunci $N_u = N_v = 0$ și prin urmare $N = N_0 - const$ pe V. Deci $\langle\mathbf{r}(u,v), N_0\rangle_u = \langle\mathbf{r}(u,v), N_0\rangle_v = 0$. Astfel $\langle\mathbf{r}(u,v), N_0\rangle = const$, deci toate punctele lui V se află într-un plan.

Dacă $\lambda \neq 0$ atunci

$$\left(\mathbf{r}(u,v) - \frac{1}{\lambda}N(u,v)\right)_u = \left(\mathbf{r}(u,v) - \frac{1}{\lambda}N(u,v)\right)_v = 0.$$

Prin urmare punctul

$$x(u,v) = \left(\mathbf{r}(u,v) - \frac{1}{\lambda}N(u,v)\right)$$

este fix și

$$|\mathbf{r}(u,v) - x|^2 = \frac{1}{\lambda}.$$

Deci V se află pe sfera de rază $1/|\lambda|$ și centru x.

Am demonstrat propoziția local. Pentru a termina demonstrația, folosim faptul că S este conexă. Prin urmare, pentru orice două puncte $p, q \in S$ există o curbă $c : [0,1] \to S$ cu $c(0) = p$ și $c(1) = q$. Pentru orice punct $c(t)$ există o vecinătate V_t în S inclusă într-o sferă sau un plan. Preimaginea $c^{-1}(V_t)$ este un interval deschis în $[0,1]$. Reuniunea $\cup c^{-1}(V_t)$ dă o acoperire a lui $[0,1]$. Cum intervalul $[0,1]$ este compact acesta poate fi acoperit cu un număr finit de mulțimi de forma $c^{-1}(V_t)$. Deci $c([0,1])$ este acoperit cu un număr finit de vecinătăți V_t.

Dacă punctele unei vecinătăți se află într-un plan, atunci toate punctele sînt într-un plan. Cum p, q sînt arbitrare toate punctele lui S sînt într-un plan.

Analog dacă una dintre vecinătăți este inclusă într-o sferă, toate punctele lui S se vor afla pe sferă.$\square$.

Definiţia 8.8. *Fie* p *un punct pe* S. *Se numește* **direcție asimptotică** *o direcție a lui* T_pS *avînd curbura normală* 0. *O* **curbă asimptotică** *a lui* S *este o curbă regulată și conexă, astfel încît pentru orice* $p \in C$ *tangenta la* C *în* p *este direcție asimptotică.*

Pentru a studia direcțiile asimptotice putem folosi **indicatricea lui Dupin**. Fie $p \in S$, se numește indicatricea lui Dupin mulțimea vectorilor $w \in T_pS$ cu $II_p(w) = \pm 1$.

Presupunem că $w = \xi e_1 + \eta e_2$ în raport cu baza ortonormată de vectori propri ai aplicației Gauss. Scriem w în „coordonate polare” $w = \rho v$ cu $|v| = 1$, $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$. Din formula lui Euler, avem

$$\pm 1 = II_p(w) = \rho^2 II_p(v) = k_1\rho^2\cos^2\theta + k_2\rho^2\sin^2\theta = k_1\xi^2 + k_2\eta^2.$$

Deci indicatricea lui Dupin este reuniunea a două conice în T_pS. Se observă că în punctele acesteia curbura normală este $k_n(v) = II_p(v) = \pm(1/\rho^2)$.

Pentru un punct eliptic indicatricea lui Dupin este o elipsă (k_1 și k_2 au același semn). Pentru un punct hiperbolic indicatricea este reuniunea a două hiperbole avînd asimptote comune. Pentru puncte parabolice, una din curburile principale este 0, deci indicatricea lui Dupin este o pereche de drepte paralele.

8.1 Exerciții

Exerciţiul 8.6. Presupunem că o suprafață are $|k_1|, |k_2| \leqslant 1$. Atunci este adevărat că curbura k a unei curbe pe S satisface $|k| < 1$?

Exerciţiul 8.7. Arătați că dacă într-un punct neplanar, curbura medie este nulă, atunci punctul are două direcții asimptotice.

Exerciţiul 8.8. Descrieți imaginea aplicației Gauss pentru următoarele suprafețe:

1. Paraboloidul de rotație $z = x^2 + y^2$;
2. Hiperboloidul de rotație $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
3. Catenoidul $x^2 + y^2 = \mathrm{ch}^2 z$;

Exerciţiul 8.9 (Teorema Beltrami-Enneper). Fie C o curbă asimptotică avînd curbura nenulă peste tot. Atunci

$$|\tau| = \sqrt{-K}$$

Bibliografie

[S] G.E. Șilov. *Analiză matematică.Spații finit-dimensionale.* Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983.

Lecția 9

Curbura medie și curbura totală

9.1 Formule de calcul pentru curbură

În lecția precedentă aplicația Gauss și cea de-a doua formă fundamentală au fost definite geometric, fără a face apel la o parametrizare locală. Este util însă să avem o formulă locală pentru aplicația Gauss și curbura totală, adică o formulă care să ne permită calculele într-o paramentrizare locală. În ceea ce urmează vom presupune că parametrizare $r : U \to S$ este compatibilă cu N, adică

$$N = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}.$$

Fixăm un punct $p \in S$, și o curbă, $c(t) = \mathbf{r}(u(t), v(v))$ cu $c(0) = p$. Atunci vectorul tangent la curbă în p are formula $c' = u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v$ și $dN_p(c') = u'N_u + v'N_v$. Cum vectorii N_u și N_v aparțin lui T_pS scriindu-i în funcție de baza canonică a acestuia obținem

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{r}_u + a_{21}\mathbf{r}_v \\ N_v &= a_{12}\mathbf{r}_u + a_{22}\mathbf{r}_v. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Prin urmare

$$dN_p(c') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{r}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{r}_v,$$

Adică

$$dN_p \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Prin urmare dN_p are matricea $(a_{ij})_{i,j=1,2}$ în raport cu baza $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$.

Formula celei de-a doua forme fundamentale este

$$\begin{aligned} II_p(c') &= -\langle dN(c'), c' \rangle = -\langle u'N_u + v'N_v, u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v \rangle = \\ &= L(u')^2 + 2M(u'v') + N(v')^2, \end{aligned} \tag{9.2}$$

coeficienții L, M și N au formulele

$$\begin{aligned} L &= -\langle N_u, \mathbf{r}_u \rangle = \langle N, \mathbf{r}_{uu} \rangle \\ M &= -\langle N_v, \mathbf{r}_u \rangle = \langle N, \mathbf{r}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{r}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{r}_v \rangle \\ N &= -\langle N_v, \mathbf{r}_v \rangle = \langle N, \mathbf{r}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Determinăm acum coeficienții a_{ij} în funcție de L, M, N (și E, F, G). Avem

$$\begin{aligned} -L &= \langle N_u, \mathbf{r}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -M &= \langle N_u, \mathbf{r}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -M &= \langle N_v, \mathbf{r}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -N &= \langle N_v, \mathbf{r}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

sau matricial

$$-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Deci

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Matricea inversă este

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

Astfel dacă notăm valoarea determinantului primei forme pătratice cu D ($=EG - F^2$) obținem

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{MF - LG}{D}, \\ a_{12} &= \frac{NF - LG}{D}, \\ a_{21} &= \frac{LF - ME}{D}, \\ a_{22} &= \frac{MF - NE}{D}. \end{aligned}$$

Ecuațiile (9.1) cu valorile coeficienților date mai sus se numesc **ecuațiile lui Weingarten**.

Curbura Gauss era definită ca $\det(dN_p)$, alfel spus

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{9.3}$$

Pentru curbura medie, ne amintim că curburile principale sînt valorile proprii ale aplicației Gauss. Prin urmare sînt rădăcini ale polinomului caracteristic

$$k^2 + (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

Deci curbura medie are formula

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}. \tag{9.4}$$

Polinomul caracteristic se rescrie

$$k^2 - 2Hk + K = 0. \tag{9.5}$$

Rădăcinile sale (anume curburile principale) sînt

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \tag{9.6}$$

Am obținut astfel o formulă pentru curburile principale în funcție de curburile medie și totală. Se vede din aceste formule că cele două curburi principale $k_1(q) \geqslant k_2(q)$ sînt funcții continue pe S, diferențiabile, mai puțin eventual în punctele ombilicale (pentru care $H^2 = K$).

Exercițiul 9.1. Să se calculeze curburile totală și medie ale torului.

Exercițiul 9.2. Fie „șaua maimuței", suprafața definită prin

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^3 - 3v^2u,$$

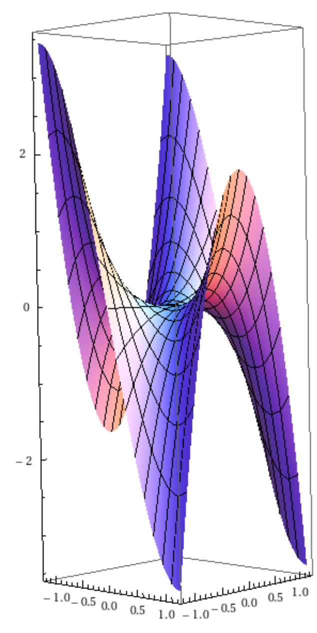


Fig. 9.1

Calculați curbura ei totală.

Exercițiul 9.3. Fie suprafața de rotație obținută prin rotirea lănțișorului în jurul asimptotei sale. Determinați o parametrizare a acesteia și calculați curbura sa totală.

Definiția inițială a lui Gauss nu făcea uz de derivata aplicației care-i poartă numele, ci chiar de aplicația N. Astfel curbura capătă o semnificație geometrică.

Pentru început să observăm că pentru o bază $\{w_1, w_2\}$ a lui T_pS (p fiind un punct cu $K(p) \neq 0$).

$$dN_p(w_1) \times dN_p(w_2) = \det(dN_p)(w_1 \times w_2) = K(p) \cdot w_1 \times w_2. \tag{9.7}$$

Adică, în cazul în care $K(p) > 0$, N păstrează orientarea, iar în cazul în care $K(p) < 0$, aplicația Gauss schimbă orientarea. O orientare în T_pS, induce o orientare pe curbele închise conținute într-o vecinătate a lui p pe S, iar imginile lor prin N vor avea aceeași orientare sau orientare contrară după semnul lui $K(p)$. Facem convenția ca aria unei vecinătăți conexe V a lui p și aria imginii ei prin N au același semn dacă $K(p) > 0$ și semne contrare dacă $K(p) < 0$. Avem acum interpretarea geometrică a curburii pentru cazul $K \neq 0$.

Teorema 9.1. *Fie* $p \in S$ *cu astfel încît* $K(p) \neq 0$ *și fie* V *o vecinătate conexă a lui* p*, pe care* K *nu-și schimbă semnul. Atunci*

$$K(p) = \lim_{A \to 0} \frac{A'}{A}, \tag{9.8}$$

unde A *este aria unei regiuni* $B \cap V$ *cu* $p \in V$*,* A' *este aria imaginii lui* B *prin* $N : S \to S^2$*, iar limita este luată după un șir* $\{B_n\}_n$ *de regiuni care converg la* p *(adică orice sferă centrată în* p *va conține toate* B_n *pentru* n *suficient de mare).*

Demonstrație. Aria A a lui B are formula

$$A = \int\int_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv, \tag{9.9}$$

pentru o parametrizare $\mathbf{r}(u, v)$ a cărei imagine conține V, iar R este regiunea din plan care corespunde lui V.

Aria A' a lui N(B) este

$$A' = \int\int_R |N_u \times N_v| du dv = \int\int_R K|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \tag{9.10}$$

A doua egalitate rezultă din definiția lui K și din convențiile pe care le-am făcut. Notînd cu R aria regiunii R avem

$$\lim_{A\to 0}\frac{A'}{A}=\lim_{R\to 0}\frac{A'/R}{A/R}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{R\to 0}\frac{1}{R}\int\int_R K|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|dudv}{\lim\limits_{R\to 0}\frac{1}{R}\int\int_R |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|dudv}=$$
$$=\frac{K|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}=K$$

(am folosit teorema de medie pentru integralele multiple ([C]). $\square$.

Exerciţiul 9.4. Arătați că în toate punctele unui plan curbura este nulă. Aceeași întrebare pentru cilindrul circular drept.

9.2 Curbe pe suprafețe

Pentru a vedea cum se curbează o suprafață este util să ne uităm la curburile curbelor conținute în aceasta. Pentru aceasta, fie $c : I \to M$ o curbă papametrizată canonic, conținută într-o suprafață S. Cum $c'(s)$ este un vector tangent pentru orice $s \in I$, $c'(s)$ va fi ortogonal pe $N(c(s))$. Deci c', N și $N \times c'$ formează un reper ortonormat în fiecare punct al curbei c. Acesta se numește **reperul Darboux** al curbei c.

Cum curba noastră este parametrizată canonic, atunci c'' este ortogonal pe c', deci va fi o combinație liniară de N și $N \times c'$:

$$c'' = k_n N + k_g(N \times c'). \tag{9.11}$$

k_n este curbura normală a curbei c (Def. 8.2),iar k_g se numește respectiv curbura geodezică în punctul s. Următorul rezultat ne permite să calculăm aceste cantități.

Propoziţia 9.1. *Fie $c : I \to S$ o curbă parametrizată canonic pe o suprafață S. Atunci*

$$k_n = \langle c'', N\rangle, k_g = \langle c'', N\times c'\rangle, \tag{9.12}$$
$$k_n^2 + k_g^2 = k^2, \tag{9.13}$$
$$k_n = k\cos\theta, k_g = \pm k\sin\theta, \tag{9.14}$$

unde k este curbura curbei, iar θ este unghiul format de N și $\mathbf{n}$, vectorul normal la curbă.

Demonstrație. Ecuațiile (9.12) sînt evidente ținînd seama de faptul că N și $N \times c'$ sînt ortogonale și de normă 1. Ecuația (9.14) rezultă din (9.12) și din faptul că $c'' = k\mathbf{n}$. Ecuația (9.13) este acum automată. $\square$

Exercițiul 9.5. Arătați că pentru orice curbă de pe sfera de rază R, curbura normală este $\pm\frac{1}{R}$.

Comportarea curbelor pe suprafață ne permite să formulăm un prim rezultat global privind curbura Gauss a unei suprafețe. Am văzut în unele din exercițiile de mai sus cîteva exemple de suprafețe care au curbura cel mult 0. Toate aceste exemple nu sînt compacte. Acest lucru nu este o întîmplare după cum ne spune

Teorema 9.2. *Fie S o suprafață regulată, compactă. Atunci S are cel puțin un punct eliptic (adică un punct p cu $K(p) > 0$).*

Demonstrație. (după [P]). Vom folosi următorul fapt elementar depsre mulțimi compacte: dacă $X \subset \mathbb{R}^3$ este compactă și $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f are un maxim și un minim pe X.

Fie acum $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(v) = |v|^2$. Cum f este continuă există un punct $p \in S$ care este punct de maxim pentru f. Deci S este conținută în bila cu centrul în origine și rază $|p|$ și intersecteaza sfera de rază $|p|$ în p. Arătăm că în p curbura Gauss a lui S este cel puțin egală cu cea sferei în p, anume $1/|p|^2$.

Pentru aceasta, fie $c : I \to S$ o curbă parametrizată canonic cu $c(0) = p$. Atunci $t \mapsto f(c(t))$ are un maxim local în 0. Prin urmare

$$\frac{d}{dt} f(c(t))\Big|_{t=0} = 0 \text{ și } \frac{d^2}{dt^2} f(c(t))\Big|_{t=0} \leqslant 0. \tag{9.15}$$

Explicit

$$\langle c(0), c'(0)\rangle = 0 \text{ și } \langle c(0), c''(0)\rangle + 1 \leqslant 0. \tag{9.16}$$

Deci vectorul de poziție al lui $p = c(0)$ este ortogonal pe orice vector tangent. Considerăm o parametrizare $\mathbf{r}$ a lui S în jurul lui p cu N vectorul său normal. Avem că

$$N = \pm\frac{p}{|p|}. \tag{9.17}$$

Inegalitatea din (9.16) se rescrie ca

$$\langle \pm|c(0)|N, c''(0)\rangle < -1, \tag{9.18}$$

adică

$$\pm\, |p| k_n \leqslant -1. \tag{9.19}$$

Deci $k_n \leqslant -1/|p|$ sau $k_n \geqslant 1/|p|$. Cum curbura normală se află între curburile principale principale, iar curba c este oarecare obținem $K = k_1 k_2 > 1/|p|^2 > 0.\square$

O clasă foarte importante de curbe este formată din geodezice. Acestea joacă pentru suprafață același rol cu dreptele din plan. Dreptele sînt percepute ca drumuri pe care mergem fără „să mișcăm volanul”. De fapt ceea ce percepem ca drepte sînt curbe pe o sferă avînd componenta tangențială a celei de-a doua derivate nulă. Riguros avem

Definiţia 9.1. *O curbă* $c : I \to S$ *pe o suprafaţă regulată se numeşte* **geodezică** *dacă are* $c''(t) = 0$ *sau* $c''(t)$ *este perpendiculară pe planul tangent în* $c(t)$*, pentru orice* $t \in I$.

Din punct de vedere fizic o geodezică este traiectoria descrisă de o particulă care se mişcă pe suprafaţă doar sub influenţa gravitaţiei (care acţionează perpendicular pe suprafaţă).

Avem cîteva caracterizări simple ale geodezicelor.

Propoziţia 9.2. *Orice geodezică are viteza constantă.*

Demonstraţie. Într-adevăr fie $c : I \to S$ o geodezică. Atunci

$$\frac{d}{dt}|c'|^2 = \frac{d}{dt}\langle c', c'\rangle = 2\langle c'', c'\rangle. \tag{9.20}$$

Cum c este geodezică, c'' este ortogonal pe c', deci lungimea derivatei este constantă.□.

Dacă reparametrizăm curba după lungimea arcului $l = |c'| = cons$, atunci vom avea $\tilde{c}(t) = c(t/l)$ o astfel de parametrizare cu

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{c} = \frac{1}{l^2}\frac{d^2}{dt^2}c. \tag{9.21}$$

Prin umare $\tilde{c}''$ şi c'' sînt coliniari, deci ne putem restrînge la cazul geodezicelor parametrizate canonic.

Legătura între curbura geodezică şi geodezice este dată de

Propoziţia 9.3. *O curbă parametrizată canonic este goedezică, dacă şi numai dacă are curbura geodezică identic nulă.*

Demonstraţie. Fie c o curbă parametrizată canonic, $p = c(0) \in S$ şi $\mathbf{r}$ o parametrizare locală în jurul lui p cu vectorul normal N. Atunci

$$k_g = \langle c'', N \times c'\rangle. \tag{9.22}$$

Cum c'' este coliniar cu N, acesta este ortogonal pe $N \times c'$, deci $k_g = 0$.

Reciproc să presupunem că $k_g = 0$, atunci c'' este ortogonal pe $N \times c'$. Cum c este canonic parametrizată, atunci c'' este ortogonal pe c'. Deci nu ne rămîne decît că c'' este coliniar cu N. □.

Din acest fapt obţinem că orice (segment de) dreaptă este geodezică. O altă clasă de geodezice este dată de

Propoziţia 9.4. *Orice secţiune normală (intersecţia suprafeţei cu un plan ortogonal pe planul tangent) este geodezică.*

Demonstrație. Planul normal care ne dă secțiunea are planul director generat de un vector tangent v și de N. Secțiunea normală este o curbă plană pe o vecinătate a lui p, avînd c' coliniar cu v și $\mathbf{n}$ coliniar cu N (sau nul). Din formula (9.14) obținem că $k_g = 0$, deci secțiunea normală este geodezică. □

Propoziția de mai sus ne spune în particular că cercurile mari ale sferei sînt geodezice.

Din păcate caracterizările geometrice prezentate mai sus nu sînt ușor de verificat în practică. O caracterizare analitică este dată în

Teorema 9.3. *O curbă* $c : I \to S$ *este geodezică dacă și numai dacă pentru orice parametrizare locală, astfel încît* $c(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, *sînt satisfăcute ecuațiile*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') &= \frac{1}{2}(E_u(u')^2 + 2F_u(u'v') + G_u(v')^2) \\ \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') &= \frac{1}{2}(E_v(u')^2 + 2F_v(u'v') + G_v(v')^2) \end{aligned} \tag{9.23}$$

numite **ecuațiile geodezice***.*

Demonstrație. $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ este o bază în planul tangent, atunci c este geodezică dacă și numai dacă c'' este ortogonal pe $\mathbf{r}_u$ și $\mathbf{r}_v$. $c' = u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v$, prin urmare avem

$$\langle \left(\frac{d}{dt}(u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v) \right), \mathbf{r}_u \rangle = 0 \tag{9.24}$$

$$\langle \left(\frac{d}{dt}(u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v) \right), \mathbf{r}_v \rangle = 0 \tag{9.25}$$

Membrul stîng al ecuației (9.24) este egal cu

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\langle u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u \rangle - \langle u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v, \frac{d\mathbf{r}_u}{dt} \rangle = \\ &= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \langle u'\mathbf{r}_u + v'\mathbf{r}_v, u'\mathbf{r}_{uu} + v'\mathbf{r}_{uv} \rangle \\ &= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \left((u')^2\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle + u'v'(\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu} \rangle) + (v')^2\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv} \rangle \right). \end{aligned}$$

Ne aducem aminte de formulele coeficienților primei forme fundamentale. Astfel

$$E_u = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle_u = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u \rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle = 2\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle, \tag{9.26}$$

deci $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uu} \rangle = \frac{1}{2}E_u$. Analog $\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv} \rangle = \frac{1}{2}G_u$ și $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu} \rangle = F_u$. Făcînd înlocuirile obținem că ecuația (9.24) este echivalentă cu

$$\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \frac{1}{2}(E_u(u')^2 + 2F_u(u'v') + G_u(v')^2) = 0, \tag{9.27}$$

adică prima ecuație geodezică. Analog demonstrăm pentru cea de-a doua.□.

Exercițiul 9.6 (**). Determinați geodezicele sferei.

Bibliografie

[C] R. Courant. *Differential and integral calculus. Vol. II*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. Translated from the German by E. J. McShane, Reprint of the 1936 original, A Wiley-Interscience Publication.

[P] Andrew Pressley. *Elementary differential geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London Ltd., London, second edition, 2010.

Lecția 10

Geometria Intrinsecă a Suprafețelor. Theorema egregium

10.1 Izometrii

Am văzut că pentru o suprafață S, prima forma fundamentală ne permite să calculăm lungimi, arii, unghiuri etc. pe suprafețe, fără a le părăsi pe acestea. Aceste concepte spunem că sînt intrinsece suprafeței. Vom arăta că și curbura Gauss nu depinde decît de prima formă fundamentală, deci și ea este o mărime intrinsecă. Pentru a putea vorbi riguros despre suprafețe „congruente" vom introduce noțiunea de izometrie.

Dacă ne uităm la plan și la cilindru observăm că pentru amîndouă prima formă fundamentală are aceeași expresie și deci lungimile și unghiurile au aceeași comportare locală. Vom vedea și alte aspecte ale suprafețelor care depind doar de prima formă fundamentală, și deci vor fi intrinseci.

Fie acum S și $\overline{S}$ suprafețe regulate.

Definiţia 10.1. *Un difeomorfism $\varphi : S \to \overline{S}$ se numește izmometrie, dacă pentru orice $p \in S$ și orice $w_1, w_2 \in T_pS$, avem*

$$\langle w_1, w_2\rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\rangle_{\varphi(p)}. \tag{10.1}$$

spunem că S și $\overline{S}$ sînt izomorfe.

Dacă φ este izometrie, atunci

$$I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w)\rangle_{\varphi(p)} = \langle w, w\rangle_p = I_p(w), \tag{10.2}$$

pentru toți $w \in T_pS$. Reciproc dacă un difeomorfism φ păstrează prima formă fundamentală, adică

$$I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) = I_p(w), \forall w \in T_pS, \tag{10.3}$$

atunci folosind formula polară care leagă o formă pătratică de una biliniară, avem

$$\begin{aligned}2\langle w_1, w_2\rangle &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) = \\ &= I_{\varphi(p)}\left(d\varphi_p(w_1 + w_2)\right) - I_{\varphi(p)}\left(d\varphi_p(w_1)\right) - I_{\varphi(p)}\left(d\varphi_p(w_2)\right) \\ &= 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\rangle,\end{aligned}$$

adică φ este izometrie.

Definiţia 10.2. *O aplicație* $\varphi : V \to \overline{S}$ *de la o vecinătate* V *a unui punct* $p \in S$ *se numește izometrie locală, dacă există o vecinătate* $\overline{V}$ *a lui* $\varphi(p) \in \overline{V}$ *astfel încît* $\varphi : V \to \overline{V}$ *este izomnetrie. Dacă pentru orice punct* $p \in S$ *există o izometrie locală pe* $\overline{S}$. *Atunci se zice că* S *este local-izometrică cu* $\overline{S}$.

Este evident că dacă $\varphi : S \to \overline{S}$ este un difeomorfism care este și izometrie locală în fiecare punct, atunci φ este izometrie globală. Se poate să existe o izometrie locală între două suprafețe, fără să existe o izometrie globală. Avem

Exemplul 10.1. Fie cilindrul drept avînd parametrizarea $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$, cu $\bar{\mathbf{r}}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ cu $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 |)0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ și planul de parametrizare $\mathbf{r}(u, v) = p_0 + u\mathbf{u} + v\mathbf{v}$. Luăm aplicația $\varphi = \mathbf{r} \circ \bar{\mathbf{r}}^{-1}$. Atunci φ este o izometrie locală. Întradevăr, fie $p \in \bar{\mathbf{r}}(U)$ și un vector tangent w la cilindru în p. Presupunem că w este tangent la curba $\overline{vr}(u(t), v(t))$. Atunci $(u(t), v(t))$ este o curbă în U. Atunci $w = \bar{\mathbf{r}}_u u' + \bar{\mathbf{r}}_v v'$. Pe de altă parte $d\varphi(w)$ este tangent la curba $\varphi\left(\bar{\mathbf{r}}\left(u(t), v(t)\right)\right) = \mathbf{r}\left(u(t), v(t)\right)$. Deci $d\varphi(w) = \mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v'$.Cum $E = \overline{E}, F = \overline{F}, G = \overline{G}$ avem că

$$\begin{aligned}I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) =& E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = \\ & \overline{E}(u')^2 + 2\overline{F}u'v' + \overline{G}(v')^2 = I_p(w).\end{aligned}$$

Deci cilindrul este local izometric cu planul. Cele două suprafețe nu sînt izometrice, deoarece nu poate exista un difeomorfism între cilindru și plan.

Acest rezultat se generalizează astfel:

Propoziţia 10.1. *Presupunem că există parametrizări* $\mathbf{r} : U \to S$ *și* $\bar{\mathbf{r}} : U \to \overline{S}$ *astfel încît* $E = \overline{E}, F = \overline{F}, G = \overline{G}$. *Atunci aplicația* $\varphi = \bar{\mathbf{r}} \circ \mathbf{r}^{-1} : \mathbf{r}(U) \to \overline{S}$ *este izometrie locală.*

Fie $p \in \mathbf{r}(U)$ și $w \in T_pS$. Atunci w este tangent la o curbă $\mathbf{r}(\alpha(t))$ cu $\mathbf{r}(\alpha(0)) = p$ și $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ este o curbă în U. Deci $w = \mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v'$. Prin construcție $d\varphi_p(w)$ este tangent la curba $\bar{\mathbf{r}} \circ \mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{r}(\alpha(t)) = \bar{\mathbf{r}}(\alpha(t))$ în $t = 0$. Adică $d\varphi_p(w) = \bar{\mathbf{r}}_u u' + \bar{\mathbf{r}}_v v'$. Cum coeficienții primei forme fundamentale coincid avem că $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$ în fiecare p. Deci φ este izometrie locală. $\square$.

Exemplul 10.2. Fie S o suprafață de revoluție avînd paramaterizarea locală

$$\mathbf{r}(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \tag{10.4}$$

cu $a < v < b$. $0 < u < 2\pi$ și $f(v) > 0$. Coeficienții primei forme pătratice sînt

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2. \tag{10.5}$$

Dacă luăm ca generatoare lănțișorul $x = a\mathrm{ch}v, z = av$. Atunci coeficienții primei forme fundamentale sînt

$$E = a^2\mathrm{ch}^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2(1 + \mathrm{sh}^2 v) = a^2\mathrm{ch}^2 v. \tag{10.6}$$

Această suprafață se numește catenoid.

Considerăm acum elicoidul, dat de parametrizarea

$$\bar{\mathbf{r}}(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{v}\cos\bar{u}, \bar{v}\sin\bar{u}, a\bar{u}), \tag{10.7}$$

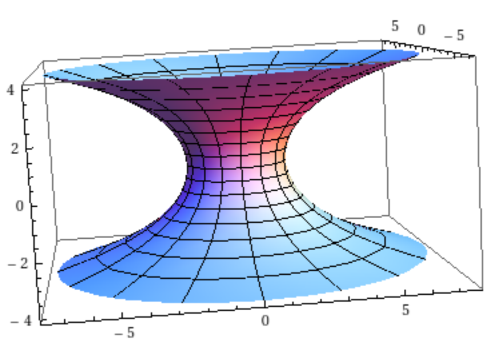
cu $0 < \bar{u} < 2\pi$ și $-\infty < \bar{v} < \infty$. Dacă facem schimbarea de variabilă $\bar{u} = u$ și $\bar{v} = a\mathrm{sh}v$ obținem o nouă parametrizare

$$\bar{\mathbf{r}}(u,v) = (a\mathrm{sh}\ v\cos u, a\mathrm{sh}\ \ \sin u, au) \tag{10.8}$$

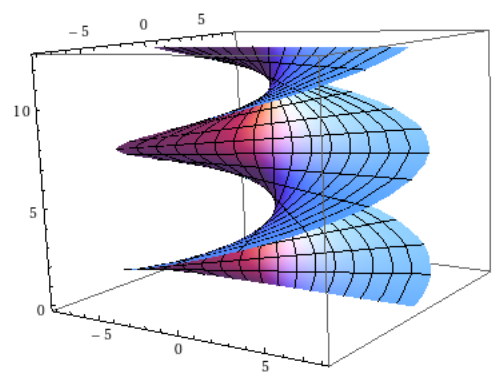
a cărei primă formă fundamentală are coeficienții

$$E = a^2\mathrm{ch}^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2\mathrm{ch}^2 v. \tag{10.9}$$

Din propoziția precedentă ne spune că elicoidul și catenoidul sînt local izometrice.



(a) Catenoidul



(b) Elicoidul

Suprafețele izometrice sînt echivalente din punct de vedere al distanței, după cum suprafețele difeomorfe sînt exhcivalente din punct de vedere diferențiabil. Putem să considerăm și alte noțiuni de echivalență pentru suprafețe. Spre exemplu motivați de teoria funcțiilor complexe și de mecanica fluidelor definim:

Definiţia 10.3. *Un difeomorfism* $\varphi : S \to \overline{S}$ *se numește aplicație conformă, dacă pentru orice* $p \in$ *și orice* $v_1, v_2 \in T_pS$ *avem*

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)\rangle = \lambda^2(p)\langle v_1, v_2\rangle_p, \tag{10.10}$$

cu λ^2 *o funcție diferențiabilă și nicăieri nulă pe* S.

O trasformare conformă va păstra unghiurile, dar nu neapărat lungimile. Într-adevăr, fie $\alpha, \beta : I \to S$, două curbe pe S care se taie în $t = 0$. Unghiul între ele va fi

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha', \beta'\rangle}{|\alpha'||\beta'|}.$$

Dacă φ este o aplicație conformă și $\overline{\theta}$ este unghiul între imaginile curbelor, atunci

$$\cos\overline{\theta} = \frac{\langle d\varphi(\alpha'), \varphi(\beta')\rangle}{|d\varphi(\alpha')||d\varphi(\beta')|} = \frac{\lambda^2\langle \alpha', \beta'\rangle}{\lambda^2|\alpha'||\beta'|} = \cos\theta.$$

Ca și în cazul izometriilor locale, avem că două suprafețe sînt local conforme, dacă și numai dacă în parametrizările respective, coeficienții primei forme fundamentale sînt proporționali, cu factorul de proporționalitate λ^2, o funcție diferențiabilă și nicăieri nulă. Avem

Teorema 10.1. *Orice două suprafețe regulate sînt local-conforme.*

Acest fapt se bazează pe existența pentru orice suprafață regulată a unei parametrizări locale pentru care coeficienții primei forme fundamentale sînt $E = \lambda^2(u, v) > 0$, $F = 0$, $G = \lambda^2(u, v)$. Un astfel de sistem de coordonate se numește izotermal. Existența sa este mai greu de dovedit și nu o vom demonstra aici.

10.2 Curbura Gauss

Prin analogie cu triedrul Frenet vom asocia fiecărui punct de pe suprafața S un triedru și vom studia derivatele vectorilor care îl compun. Triedrul considerat va fi $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, N\}$ pentru o parametrizare locală $\mathbf{r} : U \to S$. Exprimăm derivatele acestora în raport cu baza aleasă obținem

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{r}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{r}_v + L_1 N,\\
\mathbf{r}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{r}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{r}_v + L_2 N,\\
\mathbf{r}_{vu} &= \Gamma^1_{21}\mathbf{r}_u + \Gamma^2_{21}\mathbf{r}_v + \bar{L}_2 N\\
\mathbf{r}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{r}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{r}_v + L_3 N\\
N_u &= a_{11}\mathbf{r}_u + a_{21}\mathbf{r}_v\\
N_v &= a_{12}\mathbf{r}_u + a_{22}\mathbf{r}_v.
\end{aligned}
\tag{10.11}
$$

Coeficienții a_{ij} au fost determinați și sînt dați de formulele lui Weingarten. Vom determina ceilalți coeficienți. Γ^k_{ij}, se numesc coeficienții Christoffel ai lui S. Cum $\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$ avem că $\Gamma^K_{12} = \Gamma^k_{21}$,pentru orice $k = 1, 2$. Facînd produsul scalar cu N în ecuațiile (10.11), obținem că $L_1 = L$, $L_2 = \bar{L}_2 = M$ și $L_3 = N$. coeficienții celei de-a doua forme fundamentale. Pentru a determina coeficienții Christoffel facem produsele scalare cu $\mathbf{r}_u$ și $\mathbf{r}_v$. Obținem sistemul

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F &= \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u \rangle = \frac{1}{2}E_u\\
\Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G &= \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v\\
\Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F &= \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u \rangle = \frac{1}{2}E_v\\
\Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G &= \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v \rangle = \frac{1}{2}G_u\\
\Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F &= \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u\\
\Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G &= \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v \rangle = \frac{1}{2}G_v.
\end{aligned}
$$

Se observă că este vorba de fapt de trei sisteme cu două necunoscute, fiecare avînd determinantul $EG - F^2 \neq 0$. Deci putem determina coeficienții Christoffel exclusiv în funcție de coeficienții primei forme pătratice. Cu toate că nu vom calcula explicit coeficienții Christoffel avem o consecinț[importantă a sistemului: Orice expresie care implică doar acești coeficienți este un invariant în raport cu izometriile.

Din expresiile pentru derivatele triedrului $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, N\}$ vom obține o relație între coeficienții primei și celei de-a doua forme pătratice. Pornim de la relațiile

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{r}_{uu})_v - (\mathbf{r}_{uv})_u = 0,\\
&(\mathbf{r}_{vu})_u - (\mathbf{r}_{vu})_v = 0,\\
&N_{uv} - N_{vu} = 0.
\end{aligned}
$$

Înlocuind cu expresiile (10.11) expresiile de mai sus pot fi scrise

$$A_1\mathbf{r}_u + B_1\mathbf{r}_v + C_1N = 0,$$
$$A_2\mathbf{r}_u + B_2\mathbf{r}_v + C_2N = 0,$$
$$A_3\mathbf{r}_u + B_3\mathbf{r}_v + C_3N = 0,$$

coeficienții A_i, B_i și C_i depinzînd de E, F, G și $L, M, N.$ și derivatele lor. Cum $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, N\}$ sînt liniar- independente, avem că $A_i = 0, B_i = 0$ și $C_i = 0$, pentru orice $i = 1, 2, 3$. Din $A_1, B_1, C_1 = 0$ avem că

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1\mathbf{r}_{uv} + \Gamma_{11}^2\mathbf{r}_{vv} + LN_v + (\Gamma_{11}^1)_v\mathbf{r}_v + \\ L_vN = \Gamma_{12}^1\mathbf{r}_{uu} + \Gamma_{12}^2\mathbf{r}_{vu} + M \cdot N_u + &(\Gamma_{12}^1)_u\mathbf{r}_u + (\Gamma_{12}^2)_u\mathbf{r}_v + M_uN. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Egalînd coeficienții lui $\mathbf{r}_v$ și ținînd seama de (10.11) și ecuațiile lui Weingarten pentru a_{ij}, obținem

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \\ &-\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 = -E\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -EK. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Această ultimă egalitate care ne spune că curbura Gauss depinde doar de coeficienții lui Christoffel și de cei ai primei forme fundamentale este rezumată de

Teorema 10.2 (Theorema Egregium). *Curbura Gauss este invariantă la izometrii locale.*

Acest rezultat obținut de Gauss, a pus practic bazele geoemtriei diferențiale moderne, avînd un număr mare de aplicații. Spre exemplu ne spune că elicoidul și catenoidul au curburile Gauss egale.

Revenind la calculele începute, observăm că egalînd coeficienții lui $\mathbf{r}_u$ în (10.12) obținem că

$$(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 = FK. \tag{10.14}$$

Egalînd coeficienții lui N în aceeași ecuație, relația $C_1 = 0$ ne spune

$$L_v - M_u = L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2. \tag{10.15}$$

Analog pentru $C_2 = 0$ obținem

$$M_v - N_u = L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^1. \tag{10.16}$$

Ultimele două ecuații se numesc **ecuațiile Codazzi-Mainardi**.

Lecția 11

Clase remarcabile de suprafețe I

Ne vom ocupa mai în amănunt de unele suprafețe, caracterizate de proprietățile curburilor lor, în special curbura medie și curbura toatală. Pentru început ne ocupăm de curbura medie.

11.1 Suprafețe minimale

Definiţia 11.1. *O suprafață $S \subset \mathbb{R}^3$ se numește* **minimală**, *dacă are curbura medie identic egală cu* 0.

Denumirea de minimală, provine datorită următorului fapt. Să considerăm următoarea problemă variațională: Fie $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ o parametrizare regulată a unei suprafețe. Fie $D \subset U$ un domeniu mărginit și $h : \bar{D} \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă ($\bar{D} = D \cap \partial D$). Considerăm **variația normală** a lui $\mathbf{r}(\bar{D})$ determinată de h, adică aplicația

$$\varphi : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3,$$
$$\varphi(u, v, t) = \mathbf{r}(u, v) + th(u, v)\mathbf{N}(u, v).$$

Pentru fiecare valoare a lui $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, aplicația $\mathbf{r}^t : D \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$ este parametrizarea unei suprafețe, cu

$$\frac{\partial \mathbf{r}^t}{\partial u} = \mathbf{r}_u + th\mathbf{N}_u + th_u\mathbf{N},$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}^t}{\partial v} = \mathbf{r}_v + th\mathbf{N}_v + th_v\mathbf{N}.$$

Coeficienții primei forme fundamentale sînt

$$E^t = E + th(\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{N}_u \rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{N}_u \rangle) + t^2h^2\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u \rangle + t^2h_uh_u,$$
$$F^t = F + th(\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{N}_v \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{N}_u \rangle) + t^2h^2\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle + t^2h_uh_v,$$
$$G^t = G + th(\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{N}_v \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{N}_v \rangle) + t^2h^2\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_v \rangle + t^2h_vh_v.$$

Ținînd seama de expresia coeficienților celei de-a doua forme fundamentale

$$\begin{aligned} L &= -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{N}_u \rangle \\ 2M &= -(\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{N}_v \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{N}_u \rangle) \\ N &= -\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{N}_v \rangle \end{aligned}$$

și ale curburii medii

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \tag{11.1}$$

obținem

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(EN - 2FM + GL) + R = \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R, \end{aligned}$$

unde R este o funcție de t cu $\lim_{t\to 0} R/t = 0$. Deci pentru ϵ suficient de mic $\mathbf{r}^t$ este o supratață regulată. Aria lui $\mathbf{r}^t(\bar{D})$ este

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}\, du dv = \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}}\sqrt{EG - F^2}\, du dv, \end{aligned}$$

cu $\bar{R} = R/(EG - F^2)$. Dacă ϵ este mic A depinde diferențiabil de t. Avem

$$\frac{d}{dt}A(t)\Big|_{t=0} = -\int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2}\, du dv. \tag{11.2}$$

Obținem acum justificarea denumirii de suprafață minimală. Anume avem

Propoziţia 11.1. *Fie $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ o suprafață regulată și $D \subset U$ un subdomeniu mărginit al lui U. Atunci $\mathbf{r}$ este minimală dacă și numai dacă $A'(0) = 0$ pentru orice D și orice variație normală a lui $\mathbf{r}(\bar{D})$.*

Demonstrație. Dacă $\mathbf{r}$ este minimală, atunci $H \equiv 0$, deci $A'(0) = 0$. Reciproc să presupunem că există $q \in D$, astfel încît $H(q) \neq 0$. Luăm $h : \bar{D} \to \mathbb{R}$, $h(q) = H(q)$ și identic 0 înafara unei vecinătăți a lui q. Atunci $A'(0) < 0$ pentru variația determinată de h, contradicție.□

Suprafeţele minimale apar ca soluţii ale problemei lui Plateau, anume : Să se arate că pentru orice curbă $C \subset \mathbb{R}^3$ există o suprafață S mărginită de C. O parte importantă a problemei constă în precizarea condiţiilor problemei: ce curbe şi suprafeţe pot fi alese şi ce înseamnă că o curbă mărgineşte suprafaţa.

Pentru a studia suprafeţele minimale este util să considerăm vectorul curbură medie $\mathbf{H} = H\mathbf{N}$. Dacă ne uităm la ecuaţia (11.2) şi punem $h = H$, atunci aceasta devine

$$A'(0) = -2\int_{\bar{D}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle \sqrt{EG - F^2}dudv,$$

deci $A'(0) < 0$ pentru variația în direcţia lui $\mathbf{H}$ (cel puţin iniţial). Deci aria deformării va scade.

Să ne reaminitim că o parametrizare $\mathbf{r}(u, v)$ se numea izotermală, dacă $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v\rangle$ şi $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle = 0$.

Propoziţia 11.2. *Fie* $\mathbf{r}$ *o parametrizare regulată, izotermală a unei suprafeţe* S. *Atunci*

$$\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 2\lambda^2\mathbf{H}, \tag{11.3}$$

unde $\lambda^2 = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v\rangle$.

Demonstrație. Cum parametrizarea este izotermală, avem $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u\rangle = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v\rangle$ şi $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\rangle = 0$. Derivînd obţinem

$$\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u\rangle = \langle \mathbf{r}_{vu}, \mathbf{r}_v\rangle = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv}\rangle. \tag{11.4}$$

(Prima egalitate se obţine derivînd în raport cu u, prima condiţie, iar cea de-a doua derivînd-o în raport cu v pe a doua.)

Rezultă că

$$\langle \mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u\rangle = 0 \tag{11.5}$$

şi a analog

$$\langle \mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v\rangle = 0. \tag{11.6}$$

Deci $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}$ este paralel cu $\mathbf{N}$. Curbura medie are valoarea

$$H = \frac{1}{2}\frac{L + N}{\lambda^2}. \tag{11.7}$$

Prin urmare $2\lambda^2 H = L + N = \langle \mathbf{N}, \mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}\rangle$, adică

$$\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 2\lambda^2\mathbf{H}.\square \tag{11.8}$$

Din această propoziţie obţinem că o suprafaţă parametrizată, cu parametrizarea izotermală, este minimală, dacă şi numai dacă, toate componentele parametrizării ($\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$) sînt funcţii armonice (satisfac $\Delta f = 0$).

Exemplul 11.1. Catenoidul are parametrizarea $\mathbf{r}(u, v) = (a\mathrm{ch}v\cos u, a\mathrm{ch}v\sin u, av)$. Se vede ușor că $E = G = a^2\mathrm{ch}^2 v$, $F = 0$ și $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0$. Deci catenoidul este suprafață minimală.

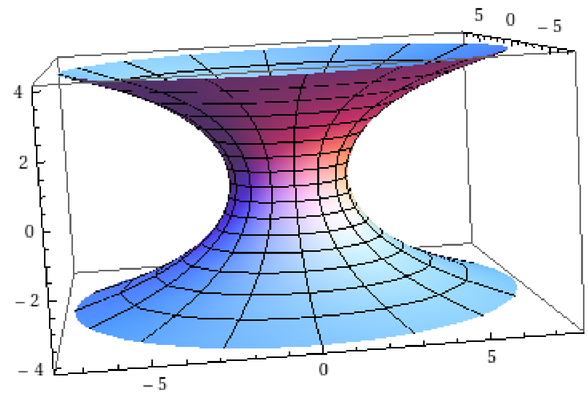


Fig. 11.1: Catenoidul

Se poate arăta că singura suprafață de rotație minimală este catenoidul.

Exemplul 11.2. Elicoidul este suprafața de parametrizare

$$\mathbf{r}(u,v) = (a \mathrm{sh} v \cos u, a \mathrm{sh} v \sin v, au).$$

Atunci coeficienții primei forme fundamentale sînt $E = G = a^2 \mathrm{ch}^2 v$, $F = 0$ și $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0$. Deci elicoidul este suprafață minimală.

Elicoidul este singura suprafață neplanară, minimală riglată. Elicoidul și catenoidul au fost descoperite de Meusnier în 1776, ca și puncte critice ale unei probleme variaționale.

Următoarea suprafață minimală descoperită este

Exemplul 11.3. Suprafața lui Enneper are parametrizarea

$$\mathbf{r}(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Se arată cu ușurință că suprafața Enneper este minimală. Se vede cu ușurință că această suprafață nu este regulată peste tot, avînd puncte de autointersecție.

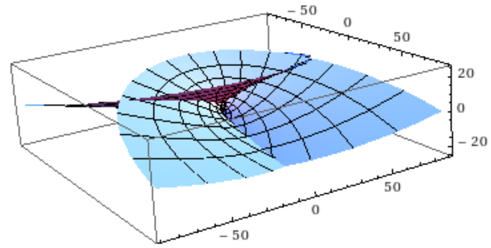


Fig. 11.2: Suprafața lui Enneper

După cum se ştie există o legătură foarte strînsă între funcţiile analitice pe $\mathbb{C}$ şi funcţiile armonice pe $\mathbb{R}^2$. O astfel de legătură poate fi scrisă şi pentru suprafeţe minimale. Anume fie $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ o suprafaţă regulat-parametrizată. Definim funcţiile complexe

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\varphi_2(\zeta) = \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v},$$
$$\varphi_3(\zeta) = \frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v},$$

unde $\zeta = u + iv \in \mathbf{C}$. Avem următoarea caracterizare

Propoziţia 11.3. *Fie $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$ o suprafaţă parametrizată regulat. Atunci $\mathbf{r}$ este izotermică, dacă şi numai dacă $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$. În acest caz $\mathbf{r}$ este minimală dacă şi numai dacă funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sînt analitice.*

Demonstrație. Prin calcul obținem că $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = E - G + 2iF$, de unde prima parte a concluziei lemei. Acum $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0$ dacă și numai dacă

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Acestea reprezintă una din ecuațiile Cauchy-Riemann pentru φ_1, φ_2, respectiv φ_3. Cealaltă ecuație este satisfăcută întotdeauna. Deci suprafața satisface $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0$ dacă și numai dacă funcțiile φ sînt analitice. $\square$.

Rezultatul acesta ne permite să dăm un alt exemplu de suprafață minimală, anume suprafața lui Scherk:

Exemplul 11.4. Fie suprafața parametrizată prin

$$\mathbf{r}(u,v) = \left(\arg\frac{\zeta+i}{\zeta-i}, \arg\frac{\zeta+1}{\zeta-1}, \log\left|\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1}\right|\right), \tag{11.9}$$

cu $\zeta \neq \pm 1, \pm i$, unde $\zeta = u + iv$ și $\arg\zeta$ este unghiul făcut de ζ cu axa Ox. Se poate calcula că

$$\varphi_1 = -\frac{2}{1+\zeta^2}, \quad \varphi_2 = -\frac{2i}{1-\zeta^2}, \quad \varphi_3 = \frac{4\zeta}{1-\zeta^4}.$$

Se vede că funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sînt analitice și $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$.

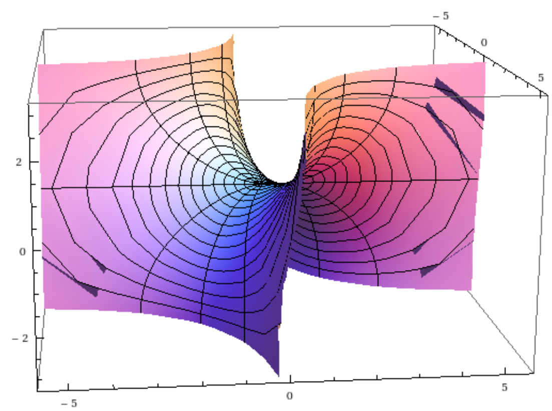


Fig. 11.3: Suprafața lui Scherk

Cu toate că orice suprafață admite o parametrizare locală izotermală este important să studiem suprafețe date de parametrizări arbitrare.Rezultatul fundamental al teoriei moderne a suprafețelor minimale este teorema de reprezentare Enneper-Weierstrass, care permite construcția unui mare număr de suprafețe minimale

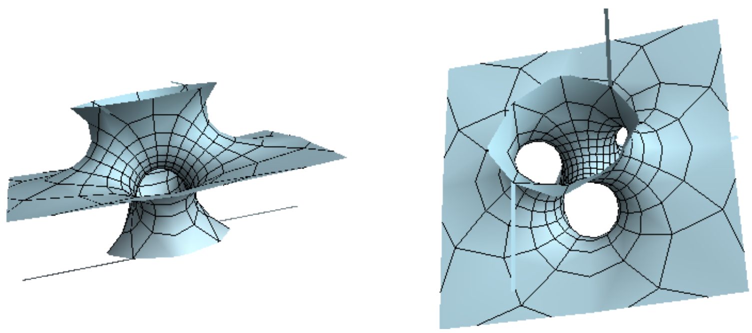
Teorema 11.1. *Pentru orice suprafață minimală neplanară avînd o parametrizare* $\mathbf{r} : U \to \mathbb{R}^3$, *cu* U *simplu conex există o funcție olomorfă* $f : U \to \mathbf{C}$ *și o funcție meromorfă* $g : U \to \mathbf{C}$ *astfel încît* fg^2 *este olomorfă pe* U *și*

$$\begin{aligned} x(w) &= x_0 + Re\int_{w_0}^{w} \frac{1}{2} f(1-g^2)\,d\zeta \\ y(w) &= y_0 + Re\int_{w_0}^{w} \frac{i}{2} f(1+g^2)\,d\zeta \\ z(w) &= z_0 + Re\int_{w_0}^{w} fg\,d\zeta. \end{aligned} \tag{11.10}$$

pentru orice $w, w_0 \in U$ *și* $\mathbf{r}(w_0) = (x_0, y_0, z_0)$ *(am notat cu* $w = u + iv$*).*

Reciproc pentru orice pereche de funcții f, g *ca mai sus formulele (11.10) dau o suprafață minimală, cu condiția ca domeniul* U *să fie simplu-conex.*

Folosind o funcție meromorfă dublu-periodică matematicianul brazilian Celso Costa a construit în 1982 o suprafață minimală completă (fără auto-intersecții sau alte puncte singulare) surprinzînd comunitatea matematicienilor în rîndul cărora se credea că singurele astfel de suprafețe sînt planul, catenoidul și elicoidul. Rezultatul lui Costa a provocat o revenire a interesului pentru studiul suprafețelor minimale (după cum se poate vedea din monografia în trei volume [DHS], [DHT1], [DHT2]).



(a) (b)

Fig. 11.4: Două vederi ale suprafeței lui Costa

Teoria suprafețelor minimale este unul dintre domeniile cele mai active ale geometriei diferențiale, folosind însă metode de teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, analiză complexă etc. Condiția de minimalitate este deosebit de restrictivă ducînd la rezultate uneori surprinzătoare cum ar fi

Teorema 11.2 (Ossermann). *Fie* $S \subset \mathbb{R}^3$ *o suprafață regulată, închisă minimală și neplanară. Atunci imaginea sa prin aplicația Gauss* $\mathbf{N}$ *este densă pe sferă (pentru orice punct al sferei există un punct din imagine arbitrar de aproape de acesta).*

Mai mult se poate arăta că imaginea lui S via $\mathbf{N}$ „ratează” cel mult 4 puncte.

Bibliografie

[DHS] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, and Friedrich Sauvigny. *Minimal surfaces*, volume 339 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer, Heidelberg, second edition, 2010. With assistance and contributions by A. Küster and R. Jakob.

[DHT1] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, and Anthony J. Tromba. *Regularity of minimal surfaces*, volume 340 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, second edition, 2010. With assistance and contributions by A. Küster.

[DHT2] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, and Anthony J. Tromba. *Global analysis of minimal surfaces*, volume 341 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, second edition, 2010.

Lecția 12

Clase remarcabile de suprafețe II

12.1 Suprafețe de curbură totală constantă

Înainte de a discuta suprafețele de curbură totală constantă avem nevoie să considerăm o clasă particulară de parametrizări.

Fie $p \in S$ și $v \mapsto \gamma(v)$ o geodezică parametrizată canonic cu $\gamma(0) = p$. Pentru fiecare v definim $u \mapsto \tilde{\gamma}^v(u)$ o geodezică canonic-parametrizată cu $\tilde{\gamma}^v(0) = \gamma(0)$. Definim parametrizarea $\mathbf{r}(u, v) = \tilde{\gamma}^v(u)$. Avem

Propoziţia 12.1. *Există un domeniu* U *în* $\mathbb{R}^2$ *cu* $(0, 0) \in U$*, astfel încît* $\mathbf{r} : U \to S$ *este o parametrizare. În plus prima formă fundamentală este* $du^2 + G(u, v)dv^2$*, cu* G *netedă și* $G(0, v) = 1$*,* $G_u(0, v) = 0$*, pentru orice* $(0, v) \in U$.

Demonstrație. (Schiță) Avem că pentru orice v,

$$\mathbf{r}_u(0, v) = \frac{d}{du}\tilde{\gamma}^v(u)\Big|_{u=0}, \ \mathbf{r}_v(0, v) = \frac{d}{dv}\tilde{\gamma}^v(0) = \frac{d}{dv}\gamma(v). \tag{12.1}$$

Deci acești vectori sînt perpendiculari. Prin urmare pentru $u = v = 0$, rangul matricei Jacobiene a lui $\mathbf{r}$ este 2 și putem aplica teorema de inversare locală. Deci $\mathbf{r}$ este parametrizare locală pentru valori al lui (u, v) apropiate de $(0, 0)$.

Calculăm acum coeficienții primei forme fundamentale. Avem

$$E = |\mathbf{r}_u|^2 = \left|\frac{d}{du}\tilde{\gamma}^v(u)\right|^2 = 1, \tag{12.2}$$

deoarece $\tilde{\gamma}^v$ este parametrizată canonic. Din ecuația geodezicelor obținem că $F_u = 0$. Pentru $u = 0$, $\mathbf{r}_u$ și $\mathbf{r}_v$ sînt perpendiculare, deci $F = 0$. De aici rezultă că $F = 0$ peste tot. Deci prima formă fundamentală are expresia

$$du^2 + g(u, v)^2 dv^2. \tag{12.3}$$

Avem

$$G(0,v) = |\mathbf{r}_v(0,v)|^2 = \left|\frac{d\gamma}{du}\right|^2 = 1, \tag{12.4}$$

γ avînd viteză 1. De asemenea din ecuația geodezicelor rezultă că $G_u(0,v) = 0.\square$

Structura locală a unei suprafețe de curbură Gauss constantă este dată de

Teorema 12.1. *Orice punct de pe o suprafață avînd curbura totală constantă este conținut într-o porțiune izometrică cu o submulțime deschisă a unui plan, sferă sau pseudosferă.*

Demonstrație. Putem presupune că $K = -1.0$ sau 1. Alegem o parametrizare geodezică $\mathbf{r}(u,v)$ cu $\mathbf{r}(0,0) = p$ astfel încît prima forma fundamentală are expresia

$$du^2 + g(u,v)^2 dv^2. \tag{12.5}$$

Folosind Theorema Egregium (10.2) avem pentru curbura Gauss

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + Kg = 0. \tag{12.6}$$

Avem și

$$g(u,v) \equiv 0 \text{ și } g_u(0,v) = 0. \tag{12.7}$$

Dacă $K = 0$, atunci $g(u,v) = au + b$, unde a și b sînd funcții netede de u. Condițiile inițiale (12.7) ne spun că $a \equiv 0$ și $b \equiv 1$. Deci $g \equiv 1$. Astfel că prima formă fundmanetală este $du^2 + dv^2$, deci $\mathbf{r}$ este izometrică cu o porțiune deschisă a unui plan.

Presupunem acum că $K = 1$. Atunci soluția ecuației (12.6) este $g = a\cos u + b\sin u$, cu a și b nedepinzînd decît de v. Din condițiile inițiale (12.7) avem că $a \equiv 1$ și $b \equiv 0$. Deci prima formă fundamentală este $du^2 + \cos^2 u dv^2$, care este prima formă fundamentală a sferei parametrizată cu u și v latitudinea, respectiv longitudinea. Deci $\mathbf{r}$ este izometrică cu o porțiune a sferei S^2.

Pentru $K = -1$, atunci obținem la fel ca mai sus că prima formă fundmanetală este $du^2 + \mathrm{ch}^2 u dv^2$. Făcînd schimbarea de variabilă $U = e^v \tanh u$ și $V = e^v \mathrm{sech} u$, prima formă fundamentală devine

$$\frac{dV^2 + dW^2}{W^2}. \tag{12.8}$$

Aceasta este prima formă fundamentală pentru pseudosfera parametrizată cu variabilele $w = e^{-u}$ și v (modelul lui Lobacevski). $\square$.

Referitor la suprafețe de curbură constantă avem următorul rezultat global:

Teorema 12.2. *Orice suprafață conexă și comapactă de curbură totală constantă este pozitivă*

Pentru demonstrație avem nevoie de un rezultat auxiliar.

Lema 12.1. *Fie* $\mathbf{r} : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^3$ *o suprafață parametrizată, care conține un punct* p *care nu este ombilical. Fie* $k_1 \geqslant k_2$ *curburile principale. Presupunem că* k_1 *are un maxim local în* p *și* k_2 *are un minim local. Atunci curbura Gauss în* p *este* $\leqslant 0$.

Demonstrație. Cum p nu este ombilical, $k_1 > k_2$ în p. Restrîngînd eventual U putem presupune că aceasta este adevărat pentru orice punct al suprafeței.

Putem presupune că formele fundamentale au expresia

$$E du^2 + G dv^2$$
$$L Du^2 + N dv^2.$$

Ecuațiile Gauss-Codazzi ne dau

$$E_v = -\frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_v$$
$$G_u = \frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_u,$$

iar curbura Gauss va fi

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right). \tag{12.9}$$

În p derivatele curburilor principale se anulează, deci în p

$$K = -\frac{1}{2EG}(G_{uu} + E_{vv}) = -\frac{1}{2EG}\left(\frac{2G}{k_1 - k_2}(k_2)_{uu} - \frac{2E}{k_1 - k_2}(k_1)_{vv}\right). \tag{12.10}$$

Cum p este punct de maxim local pentru k_1, $(k_1)_{vv} \leqslant 0$. Cum p este punct de minim pentru k_2, $(k_2)_{vv} \geqslant 0$. Deci $K \leqslant 0$. □

Putem trece acum la demonstrația teoremei. Considerăm funcția $J = (k_1 - k_2)^2$, definită și continuă pe S. Presupunem că J nu este identică 0 pe S. Cum S este compactă, J va avea un maxim > 0 pe S. Cum suprafața este compactă, avem $K > 0$. deci $k_1 k_2 > 0$. Putem presupune că ambele curburi principale sînt pozitive. Presupunem $k_1 > k_2$. Cum ambele sînt funcții continue de p putem presupune că $k_1 > k_2$ peste tot. Cum K este constantă, atunci funcția $\left(x - \frac{K}{x}\right)^2$ crește cu $x > K/x > 0$. Cum $k_1 > K/k_1 = k_2 > 0$ funcția este crescătoare în k_1, deci k_1 are un maxim local în p, deci $k_2 = K/k_1$ are un minim local în p. Conform lemei de aici rezultă că $K \leqslant 0$, contradicție.

Avem deci $k_1 = k_2 > 0$ pe S. Deci S este o submulțime deschisă a sferei. Fiind compactă, rezultă că S este și închisă. Cum sfera este conexă singura submulțime închisă și deschisă este ea însăși. □.

12.2 Suprafețe riglate

Definiţia 12.1. *Se numește suprafață riglată o suprafață avînd parametrizare de forma*

$$\mathbf{r}(t, v) = c(t) + v w(t), \; r \in I, \; v \in \mathbb{R}. \tag{12.11}$$

unde $c : I \to \mathbb{R}^3$ *este o curbă, iar pentru orice* t*,* $w(t)$ *este un vector nenul (*w *depinde diferențiabil de* t*).*

Am întîlnit deja o suprafață riglată, anume suprafața de tangente din Exercițiul 7.6.

Exerciţiul 12.1. Fie S^1 cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$ din planul xOy și $c(s)$ parametrizarea sa după lungimea arcului. Fie e_3 versorul axei Oz și pentru orice s, $w(s) = c'(s) + e_)$. Atunci suprafața de parametrizare

$$\mathbf{r}(s, v) = c(s) + v(c'(s) + e_3) \tag{12.12}$$

este o suprafață riglată. Pe componente avem

$$\mathbf{r}(s, v) = (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v). \tag{12.13}$$

Observăm că $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, deci am obținut hiperboloidul cu o pînză. Luînd $w(s) = -c'(s) + e_3$ obținem aceeași suprafață, deci hiperboloidul cu pînză are o dublă riglare.

Pentru a studia suprafețele riglate putem presupune că $|w(t)| \equiv 0$. De asemenea vom face și presupunerea suplimentară că $w'(t) \neq 0$, pentru orice $t \in I$. Această presupunere implică faptul că $\langle w(t), w'(t) \rangle = 0$ pentru orice t.

Căutăm acum o curbă $\gamma(t)$ astfel încît $\langle \gamma'(t), w'(t) \rangle = 0$ și curba este inclusă în suprafață, adică există o funcție reală $u(t)$ astfel ca

$$\gamma(t) = c(t) + u(t) w(t). \tag{12.14}$$

Presupunem că există o astfel de curbă. Atunci $\gamma' = c' + u'w + uw'$. Condiția de ortogonalitate ne spune

$$0 = \langle \gamma', w' \rangle = \langle c', w' \rangle + u \langle w', w' \rangle. \tag{12.15}$$

De aici obținem

$$u = -\frac{\langle c', w'}{w', w'} \tag{12.16}$$

și prin urmare găsim γ dată de ecuația(12.14).

Arătăm acum că γ, numită linie de îngustare și ale cărei puncte se numesc puncte centrale, nu depinde de alegerea directoarei c. Fie $\bar{c}$ o altă directoare, care ne dă parametrizarea

$$\mathbf{r}(t, v) = \bar{c}(t) + s w(t) = c(t) + v w(t), \tag{12.17}$$

unde $s = s(v)$ este o funcție diferențiabilă. Atunci linia de îngustare $\bar{\gamma}$ satisface

$$\gamma - \bar{\gamma} = (c - \bar{c}) + \frac{\langle \bar{c}' - c', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} w = \left((s - v) + \frac{\langle (v - s) w', w' \rangle}{\langle w', w' \rangle} \right) w = 0. \qquad (12.18)$$

Putem alege linia de îngustare ca directoare a suprafeței și să scriem

$$\mathbf{r}(t, u) = \gamma(t) + u w(t). \qquad (12.19)$$

Atunci

$$\mathbf{r}_t = \gamma' + u w', \quad \mathbf{r}_u = w. \qquad (12.20)$$

Deci

$$\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_u = \gamma' \times w + u w' \times w. \qquad (12.21)$$

Cum $\langle w', w \rangle = 0$ și $\langle w', \gamma' \rangle = 0$, atunci $\gamma' \times w = \lambda w'$, pentru o funcție λ. Deci

$$|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_u|^2 = \lambda^2 |w'|^2 + u^2 |w'|^2 = (\lambda^2 + u^2)|w'|^2. \qquad (12.22)$$

Astfel toate punctele singulare se află de-a lungul liniei de strîmtare și apar numai pentru $\lambda(t) = 0$.

Calculăm acum curbura Gauss pentru punctele regulate. Avem

$$\mathbf{r}_{tt} = \gamma'' + u w'', \quad x_{tu} = w', \quad \mathbf{r}_{uu} = 0. \qquad (12.23)$$

Pentru coeficienții formei a doua avem

$$N = 0, \quad M = \frac{\langle \mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{ut} \rangle}{|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_u|} = \frac{\langle c' \times w, w' \rangle}{|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_u|}. \qquad (12.24)$$

Nu este nevoie să calculăm L pentru că $N = 0$. Deci

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{\lambda^2 w'|^4}{(\lambda^2 + u^2)^2 |w'|^4} = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + u^2)^2}. \qquad (12.25)$$

Prin urmare curbura Gauss este negativă, fiind nulă de-a lungul riglelor care întîlnesc linia de îngustare în puncte singulare.

Se observă că punctele centrale sînt puncte de maxim ale funcției $|K(u)|$, iar valorile acesteia sînt egale pentru puncte situate simetric față de punctul central.

O clasă importantă de suprafețe riglate este cea a *suprafețelor desfășurabile*. Acestea sînt suprafețe riglate care satisfac $\langle w \times w', c' \rangle \equiv 0$. Calculînd coeficienții celei de-a doua forme fundamentale obținem

$$N = 0, \quad M = \frac{\langle w \times w', c' \rangle}{|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_u|} = 0. \qquad (12.26)$$

Deci $K \equiv 0$. Din teorema 12.1 avem că astfel de suprafețe sînt local-izometrice cu un plan.