Sinteza lucrării

Program PN II-IDEI, Cod ID8, contract nr. 525/08.01.2009

SUBMERSII ŞI SUBVARIETĂŢI ÎN GEOMETRII DE TIP CUATERNIONIC

Director: prof. dr. Liviu Ornea

1. Articole ştiinţifice realizate în etapa 2009

Articole publicate în reviste cotate ISI

[1] Stere Ianuş, Mihai Vişinescu, Gabriel Eduard Vîlcu, *Conformal Killing-Yano tensors on manifolds with mixed 3-structures*, SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 5 (2009), Paper 022, 12 pages.

[2] Liviu Ornea, Andrei Moroianu, *Transformations of locally conformally Kaehler manifolds*, Manuscripta Mathematica 130 (2009), 93–100.

[3] Gabriel Eduard Vîlcu, *Riemannian foliations on quaternion CR-submanifolds of an almost quaternion Kähler product manifold*, Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences 119 (2009), No. 5, 611-618.

Articole acceptate spre publicare în reviste cotate ISI

[4] Stere Ianuş, Gabriel Eduard Vilcu, Semi-Riemannian hypersurfaces in manifolds with metric mixed 3-structures, Acta Mathematica Hungarica (2010), în curs de apariţie.

Articole trimise spre publicare

[5] Gabriel Eduard Vîlcu, *Para-hyperhermitian structures on tangent bundles*, 2009.

[6] Stere Ianuş, Liviu Ornea, Gabriel Eduard Vîlcu, *Invariant and anti-invariant submanifolds in manifolds with metric mixed 3-structures*, 2009.

2. Îndeplinirea criteriilor de performanţă

Conform Anexei IIb din actul adiţional nr. 1/2009 la contractul de finanţare nr. 525/08.01.2009, în anul 2009 trebuia publicat un articol într-o revistă cotată ISI. Având în vedere că în această etapă au fost realizate 6 articole după cum urmează:

- 3 articole publicate în reviste cotate ISI [1,2,3],
- 1 articol acceptat spre publicare într-o revistă cotată ISI [4]
- 2 lucrări trimise spre publicare [5,6],

criteriile de performanţa asteptate au fost îndeplinite.

În perioada de raportare am acordat atenţie deosebită mobilităţilor, considerate esenţiale pentru diseminarea rezultatelor şi, mai ales la tineri, pentru acumularea de experienţă şi asimilarea unor rezultate şi tehnici noi. Astfel:

- Prof. dr. Liviu Ornea a participat la conferinţele:
  - *Kähler and Sasakian geometry* (Roma),
  - *A harmonic map fest, in honor of prof. John Wood* (Cagliari) (invited speaker)
  - *Kähler and related geometries* (Nantes) (invited speaker),
- Conf. dr. Gabriel Eduard Vîlcu a participat la colocviul *Paulette Libermann, Héritage et descendance* (Paris)
- Drd. Rodica Cristina Voicu a participat la:
  - conferinţa *Algebra, Geometry and Mathematical Physics: 5th Baltic-Nordic AGMP Workshop*, la Bedlewo (Polonia)
  - cursul de vară *Geometric Aspects in Non-Linear Analysis*, susţinut de către Sun-Yung Alice Chang (Princeton University) şi Andrea Malchiodi (S.I.S.S.A. Trieste), ce a avut loc la Cortona (Italia).

3. Detalierea rezultatelor obţinute

Structurile paracuaternionice, numite iniţial structuri cuaternionice de speţa a doua, au fost introduse pentru prima data în geometrie de catre P. Libermann, in 1952 (P. Libermann, *Sur les structures presque quaternioniennes de deuxieme espece*, C.R. Acad. Sc. Paris 234(1952), 1030–1032). Teoria lor merge în paralel cu cea a structurilor cuaternionice, dar foloseşte algebra numerelor paracuaternionice în care doi generatori au patrat 1 şi unul -1.

Pandantul în dimensiune impară al structurilor paracuaternionice îl reprezintă 3-structurile mixte, acestea apărând în mod natural pe hipersuprafeţele luminoase în varietăţi paracuaternionice (cf. S. Ianuş, R. Mazzocco, G.E. Vîlcu, *Real lightlike hypersurfaces of paraquaternionic Kähler manifolds*, Mediterranean J. Math. 3 (3–4) (2006), 581–592). O metrica compatibilă cu o 3-structura mixtă este obligatoriu semi-Riemann, iar varietăţile mixt 3-Sasaki sunt Einstein, de unde posibila importanţa a acestor structuri pentru fizica teoretică.

Pe de altă parte, existenţa tensorilor Killing-Yano (conformi) pe varietăţi înzestrate cu structuri geometrice speciale este un subiect extrem de important în teoriile moderne ale fizicii, deoarece ei joacă un rol fundamental în generarea de noi supersimetrii exotice. Principalul rezultat din lucrarea [1] se refera la existenţa unor astfel de tensori pe varietaţi mixt 3-Sasaki.

Teorema 1. Fie $(M^{4n+3}, (\phi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, g)$ o varietate mixt 3-Sasaki. Atunci:

(i) Există câmpuri vectoriale Killing spaţiale, temporale şi luminoase pe M.

(ii) η_1, η_2, η_3 sunt tensori Killing–Yano conformi de rang 1 pe M.

(iii) $d\eta_1$, $d\eta_2$, $d\eta_3$ sunt tensori Killing–Yano strict conformi de rang 2 pe M.

(iv) M admite tensori Killing–Yano de rang $(2k+1)$, pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, 2n+1\}$.

Varietăţile local conform Kähler (l.c.K.) sunt varietăţi hermitiene a căror formă fundamentală satisface condiţia de integrabilitate $d\omega = \theta \wedge \omega$ pentru o 1-formă închisă θ numită forma Lee. Local, aceasta este exactă, $\theta = df$ şi $e^{-f}g$ e o metrică Kähler locală. Conexiunile Levi Civita ale acestor metrici Kähler locale se lipesc la o conexiune globală, anume conexiunea Weyl asociată clasei conforme $[g]$ cu ajutorul 1-formei θ.

O clasă aparte de varietăţi l.c.K. e constituită de varietăţile Vaisman, definite de paralelismul formei Lee faţă de conexiunea Levi Civita. Acestea sunt suspensii peste cerc: spaţiul lor de acoperire universală este un con riemannian peste o varietate Sasaki compactă W, grupul transformărilor de acoperire e izomorf cu $\mathbb{Z}$, generat de $(w, t) \mapsto (\varphi(w), qt)$, unde q e un număr întreg pozitiv şi φ e un automorfism sasakian al lui W (cf. L. Ornea, M. Verbitsky, *Structure Theorem for compact Vaisman manifolds*, Math. Res. Lett. 10, 799-805 (2003)).

Astfel, simetriile interesante ale unei varietăţi l.c.K. sunt următoarele: transformările (anti)olomorfe, cele conforme, cele afine faţă de conexiunea Levi Civita, cele afine faţă de conexiunea Weyl, izometriile. În consecinţă, devine interesant şi studiul algebrelor Lie asociate grupurilor de transformări determinate de simetriile descrise. Până la articolul nostru, nu se ştia mare lucru despre nici unul dintre aceste grupuri (cu excepţia câtorva informaţii dintr-o lucrare mai veche a lui I. Vaisman despre câmpuri olomorfe (I. Vaisman, *Holomorphic vector fields on locally conformal Kähler manifolds*, An. St. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, XXIV (2) (1978), 357–362.)).

În lucrarea [2], am discutat legăturile dintre aceste algebre Lie. Principalele rezultate demonstrate sunt:

Teorema 2. Un câmp vectorial conform pe o varietate Vaisman compactă care nu este nici local conform hiperKähler nici Hopf diagonală este Killing şi olomorf.

Teorema 3. Pe o varietate local conform Kähler care nu e local conform hiperKähler şi cu olonomia conexiunii Weyl ireductibilă, orice câmp afin faţă de conexiunea Weyl este Killing şi olomorf.

Acesta este un rezultat local. Dar, dacă varietatea e compactă, poate fi întărit:

Corolar. În ipotezele Teoremei 3., dacă varietatea e şi compactă, atunci orice câmp Killing faţă de metrica Gauduchon este olomorf.

Metrica Gauduchon este unica în clasa ei conformă având forma Lee coînchisă şi este esenţială în studiul stabilităţii fibraţilor olomorfi pe varietăţi non Kähler. Observăm că rezultatul din corolar este un analog al cunoscutei teoreme a lui Lichnerowicz pe varietăţi Kähler.

Demonstraţiile rezultatelor citate sunt de facturi complet diferite. Teorema 3. derivă din analogul unui rezultat cunoscut în context Kähler, dar pe care noi îl demonstrăm diferit: *Pe o varietate l.c.K. care nu e local conform hiperKähler şi cu olonomia conexiunii Weyl ireductibilă, orice transformare afină faţă de conexiunea Weyl este olomorfă sau antiolomorfă.* În schimb, pentru Teorema 2., am demonstrat un rezultat mai general, despre suspensii riemanniene, aplicând apoi teorema de structură menţionată: *Fie φ o izometrie a unei varietăţi riemanniene compacte (W, h) şi fie $(M, g) := (W, h) \times \mathbb{R}/\{(w, t) \mapsto (\varphi(w), t + 1)\}$ suspensia lui φ peste cerc. Atunci orice câmp conform pe (M, g) e Killing.*

Pe de altă parte se ştie că produsul a două varietăţi Kähler este Kähler, rezultat ce nu mai este valabil şi în cazul varietăţilor cuaternionice Kähler, deoarece $(\mathrm{Sp}(n) \cdot \mathrm{Sp}(1)) \times (\mathrm{Sp}(m) \cdot \mathrm{Sp}(1)) \not\subset \mathrm{Sp}(n + m) \cdot \mathrm{Sp}(1))$. Totuşi, distribuţiile $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}^\perp$ implicate în definiţia CR-subvarietăţilor într-un produs de varietăţi cuaternionice Kähler sunt integrabile dacă acestea sunt invariante în raport cu structura produs canonică F. În lucrarea [3] au fost studiate foliaţiile naturale $\mathfrak{F}$ şi $\mathfrak{F}^\perp$ pe astfel de subvarietăţi, găsindu-se condiţii necesare şi suficiente ca acestea să fie Riemanniene, respectiv CR-subvarietăţile cuaternionice să fie riglate sau QR-produse. Un alt rezultat obţinut în [3] stabileşte că dacă

M este o CR-subvarietate cuaternionică într-un produs de varietăţi cuaternionice Kähler astfel încât distribuţiile $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}^{\perp}$ sunt F-invariante, atuci M este o subvarietate riglată în raport cu ambele foliaţii $\mathfrak{F}$ şi $\mathfrak{F}^{\perp}$.

În lucrarea [4] au fost studiate hipersuprafeţele de co-index 0 şi 1 în varietăţi înzestrate cu 3-structuri mixte şi metrici compatibile, utilizând tehnici din teoria foliaţiilor, teoria hipersuprafeţelor şi geometria semi-Riemaniană. Este de remarcat că spre deosebire de cazul Riemannian, unde orice hipersuprafaţă are co-indexul 0, în geometria semi-Riemann indexul 1 este la fel de natural ca şi indexul 0. În cazul în care aceste hipersuprafeţe sunt tangente la câmpurile vectoriale de structură au fost evidenţiate distribuţii care apar în mod natural. În cazul particular în care mediul ambiant este mixt 3-cosimplectic sau mixt 3-Sasaki au fost studiate anumite foliaţii naturale, găsindu-se condiţii necesare şi suficiente ca acestea să fie total geodezice. Au fost studiate de asemenea şi hipersuprafeţele semi-Riemann în varietăţi înzestrate cu 3-structuri mixte metrice, normale la unul din câmpurile vectoriale de structură, găsindu-se rezultate contrare în funcţie de mediul ambiant: integrabilitatea distribuţiei canonice şi foile imersate total geodezic în context mixt 3-cosimplectic, respectiv neintegrabilitatea distribuţiei canonice în context mixt 3-Sasaki şi dimensiune strict mai mare ca 3.

Rezultatele obţinute în lucrarea [5] probează existenţa unei structuri aproape parahipercomplexe pe fibratul tangent al unei varietăţi parahermitiene, precum şi al unei metrici compatibile. Mai mult chiar, s-a demonstrat existenţa unei întregi familii de structuri aproape parahiperhermitiene pe fibratul tangent al unei astfel de varietăţi. De asemenea au fost găsite condiţii necesare şi suficiente pentru integrabilitatea structurilor definite şi pentru ca acestea să devină para-hyper-Kähler.

În lucrarea [6] au fost investigate subvarietăţile invariante şi anti-invariante. Au fost furnizate numeroase exemple şi s-a demonstrat că o subvarietate total ombilicală a unei varietăţi mixt 3-Sasaki, tangentă la câmpurile vectoriale de structură este invariantă şi total geodezică. S-au găsit condiţii necesare şi suficiente astfel încât conexiunea în fibratul normal să fie trivială. Astfel a fost obţinut următorul rezultat.

Teorema 4. Fie M o subvarietate anti-invariantă de codimensiune minimă într-o varietate $\overline{M}$ înzestrată cu o 3-structură mixtă metrică $((\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, \overline{g})$, astfel încât câmpurile vectoriale de structură sunt normale la M.

(*i*) Dacă $(\overline{M}, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, \overline{g})$ este mixt 3-cosimplectică, atunci $R^\perp \equiv 0$ dacă şi numai dacă $R \equiv 0$.

(*ii*) Dacă $(\overline{M}, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, \overline{g})$ este mixt 3-Sasaki, atunci conexiunea în fibratul normal este trivială dacă şi numai dacă M este de curbură secţională constantă ∓ 1, după cum 3-structura mixtă este pozitivă sau negativă.

Un alt rezultat important demonstrat în [6] se referă la legătura dintre clasa subvarietăţilor total geodezice şi a celor invariante tangente la câmpurile vectoriale de structură în ambient 3-Sasaki:

Teorema 5. O subvarietate nedegenerată a unei varietăţi mixt 3-Sasaki $(\overline{M}, (\varphi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}, \overline{g})$, tangentă la ξ_1, ξ_2, ξ_3, este total geodezică dacă şi numai dacă este invariantă.

Este de remarcat că rezultatul anterior corespunde unei teoreme demonstrate de către Cappelletti Montano, Di Terlizzi şi Tripathi pentru subvarietăţi în (κ, μ)-varietăţi de contact (B. Cappelletti Montano, L. Di Terlizzi and M. M. Tripathi, Invariant submanifolds of contact (κ, μ)-manifolds, Glasg. Math. J. **50**, no. 3, 499–507 (2008)). Tot în lucrarea [6] s-a arătat că orice subvarietate invariantă a unei varietaţi mixt 3-cosimplectice, normală la câmpurile vectoriale de structură, este para-hyper-Kähler.

Director de proiect, Data: 14.12.2009

prof. dr. Liviu Ornea