

RAPORT IN EXTENSO
ASUPRA LUCRARILOR LA CONTRACTUL 542/2009/13.01.2009
CU TITLUL *ALGORITMI SI COMBINATORICA IN ALGEBRA SI*
GEOMETREI,
COD PROIECT 1903, DIRECTOR DORIN POPESCU

Pentru anul 2010, obiectivele contractului (stabilite prin Act aditional) au fost urmatoarele:

Obiectivul 1. *Publicarea si diseminarea unor rezultate in domeniile tematicii contractului.*

Obiectivul 2. *Perfectionarea resursei umane interesata de tematica contractului.*

Pentru fiecare dintre aceste obiective, am avut prevazute mai multe activitati. Detaliem in continuare modul in care au fost realizate activitatile contractului.

Obiectivul 1. *Publicarea si diseminarea unor rezultate in domeniile tematicii contractului* a avut prevazute 3 activitati si anume:

Activitatea.1. *Colaborarea intre membrii echipei de cercetare sau intre acestia si alti specialisti pentru obtinerea unor rezultate semnificative.*

In cadrul acestei activitati, membri ai echipei de proiect au colaborat cu specialisti din Germania (J.Herzog) sau de la alte Universitati sau Institute din Romania (M.Becheanu, M.Singer). Ca urmare a acestor colaborari, au fost realizate si publicate sau submise un numar de 3 lucrari scrise in colaborare, si anume: *Stanley depth and size of a monomial ideal*, autori J. Herzog, D.Popescu si M. Vladoiu, submisa la Journal of Algebra; *Irreducibility Criteria via Jordan Matrices*, autori M. Becheanu si M. Vladoiu, submisa la Acta Arithmetica; *In Search of Structures: How Does the Mind Explore Infinity?*, autori C.Voica si M.Singer, a fost publicata in revista Mind, Brain, and Education, Volume 4—Number 2, 81-93.

Consideram ca, desi nu am avut posibilitatea sa asiguram stagii de lucru sau de informare in alte Universitati, iar colaborarea s-a facut mai ales prin intermediu internetului, am reusit sa realizam aceasta activitate.

Activitatea 2: *Prezentarea rezultatelor cercetarii in cadrul unor seminarii stiintifice sau a unor manifestari stiintifice locale.*

Membrii contractului ai participat, in perioada raportata, la doua manifestari stiintifice nationale: Scoala Nationala de Algebra

(<http://math.univ-ovidius.ro/sna/edition.aspx?cat=GeneralInfo&itemID=4>) si

Conferinta de Matematica Aplicata si Industriala CAIM

(http://www.romai.ro/index.php?option=com_content&view=article&id=127&Itemid=189).

Deși nu face parte, strict, din perioada raportată (august-decembrie 2010), menționăm și participarea membrilor contractului la conferința International Conference and Humboldt Kolleg on Fundamental Structures of Algebra, desfășurată în perioada 14-18 aprilie 2010, la Univ. din Constanța.

Rezultatele cercetării au fost de asemenea prezentate în cadrul Seminarului științific „Algebra locală”, desfășurat săptămânal (marți, 12-14) la FMI. Considerăm că, prin multitudinea comunicărilor făcute în cadrul unor conferințe, această activitate a fost îndeplinită cu succes.

Activitatea 3. Organizarea unei școli de vară în tematica contractului.

Membri ai echipei de proiect au făcut parte din Comitetul Științific (<http://math.univ-ovidius.ro/sna/edition.aspx?cat=Committee&itemID=4>) și din Comitetul de organizare (<http://math.univ-ovidius.ro/sna/edition.aspx?cat=Organizers&itemID=4>) al Școlii Naționale de Algebra, desfășurată la București în septembrie 2010.

Un alt membru al proiectului a făcut parte din comitetul științific al Conferinței de Matematică Aplicată și Industrială CAIM (http://www.romai.ro/index.php?option=com_content&view=article&id=130&Itemid=191)

Considerăm că această activitate a fost realizată cu succes.

Obiectivul 2. Perfectionarea resursei umane interesată de tematica contractului a avut prevăzute două activități și anume:

Activitatea 1. Propunerea și conducerea unor teme de licență, de dizertație sau de doctorat în tematica contractului.

La avizierul FMI, a apărut lista cu teme de licență sau de dizertație pentru anul universitar 2010-2011. Membrii contractului au propus (printre altele) și teme în tematica contractului.

În momentul acestei raportări, perioada de alegere a temelor de licență sau de dizertație pentru anul universitar în curs nu s-a încheiat

încă (<http://fmi.unibuc.ro/ro/pdf/2010/secretariat/ANUNT%20referitor%20la%20temele%20de%20licență%20sau%20disertatie%20anul%20universitar%202010%202011.pdf>).

Deocamdată, există cel puțin o temă aleasă în tematica contractului ("Metode computaționale în Geometria Algebrică", temă de dizertație, stud. Brănoiu A., cond.șt. C.Voica) și mai există încă 2 studenți care și-au manifestat intenția de a alege astfel de teme, dar discuțiile preliminare nu s-au finalizat cu fixarea unui titlu.

Considerăm că această activitate s-a desfășurat în condiții bune.

Activitatea 2. Organizarea unor seminarii științifice sau a unor conferințe adresate unor cercetători, doctoranzi sau studenți interesați de tematica contractului.

A fost continuat seminarul științific „Algebra locală”.

Din cauza lipsei de fonduri, nu a fost posibilă asigurarea unor stagii de cercetare pentru cercetătorii fără experiență, membri ai contractului (așa cum apărea inițial, la momentul contractării acestui proiect).

In actul aditional semnat in luna august 2010, au fost asumate urmatoarele rezultate asteptate:

Doua articole publicate (sau acceptate spre publicare) in reviste cotate ISI; un articol publicat (acceptat spre publicare) intr-o revista indexata in baze de date internationale; desfasurarea seminarului stiintific de "Algebra locala"; cel putin o tema de licenta sau de dizertatie, propusa in tematica contractului; participarea unor membri ai contractului la a 18-a Scoala Nationala de Algebra, desfasurata la Bucuresti in perioada 19-25 septembrie 2010.

Detaliam in continuare modul de realizare.

1. Lucrarea *Stanley conjecture on intersections of four monomial prime ideals*, autor D. Popescu, a fost postata pe Arxiv (<http://arxiv.org/abs/1009.5646>) si a fost submissa la Journal of Algebra (revista cotata ISI). Nu a fost confirmata inca acceptarea ac estei lucrari.
2. Lucrarea *Bounds of Stanley depth*, autor D. Popescu, a fost acceptata spre publicare in Ann. St. Univ. Ovidius, Constanta (revista cotata ISI). Lucrarea va aparea in numarul omagial dedicat prof. S. Basarab.
3. Lucrarea *Stanley depth and size of a monomial ideal*, autori J. Herzog, D. Popescu si M. Vladioiu, a fost recent submissa la Journal of Algebra (revista cotata ISI).
4. Lucrarea *Irreducibility Criteria via Jordan Matrices*, autori M. Becheanu si M. Vladioiu, a fost recent submissa la Acta Arithmetica (revista cotata ISI).
5. Lucrarea *In Search of Structures: How Does the Mind Explore Infinity?*, autori C. Voica si M. Singer, a fost publicata in revista Mind, Brain, and Education, Volume 4—Number 2, 81-93 (<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/mbe.2010.4.issue-2/issuetoc>). Revista este inclusa in baze de date internationale.
6. Seminarul stiintific *Algebra Locala* se desfasoara saptamanal, martea, 12-14, sala 120, FMI (http://fmi.unibuc.ro/ro/orar/temporar/2010_2011/semestrul_l/index.html). Seminarul este coordonat de catre prof.dr. Dorin Popescu.
7. A fost aleasa o tema de dizertatie in tematica contractului ("Metode computationale in Geometria Algebraica", cond. st. C. Voica) si exista discutii preliminare (la acest moment) pentru alte doua lucrari de dizertatie.
8. Membri ai contractului au participat la Scoala Nationala de Algebra (<http://math.univ-ovidius.ro/sna/edition.aspx?cat=Participants&itemID=4>) si la Conferinta de Matematica Aplicata si Industriala CAIM, facand parte din comitetele stiintifice sau din comitetele de organizare.

Din pacate, din cauza timpului scurt cuprins intre data semnarii actului aditional (august 2010) si data raportarii (noiembrie 2010), nu a fost posibil sa obtinem avizul favorabil privind publicarea tuturor lucrarilor submise. Speram ca acest aviz sa soseasca in scurt timp, pentru a le include in raportarile viitoare. Atragem atentia asupra faptului ca numarul lucrarilor elaborate/ publicate este dublu fata de angajamentul asumat. De aceea, consideram ca rezultatele obtinute sunt in concordanta cu rezultatele asteptate, asumate anterior.

Prezentam in continuare un rezumat al rezultatelor obtinute in lucrarile enumerate mai sus.

Un subiect de mare interes in cercetarea matematica actuala la nivel international il constituie doua conjecturi formulate de Richard Stanley. In prima conjectura Stanley se refera la asa numitele descompuneri Stanley ale modulelor multigraduate finite generate peste inele de polinoame in n variabile standard graduate, iar a doua se refera la complexe simpliciale partitionabile. Prima conjectura a fost lansata de Stanley in 1982 intr-un articol aparut in prestigioasa revista *Inventiones Mathematicae* si timp de 23 de ani a fost validata doar in citeva cazuri izolate. Aceasta conjectura afirma ca orice modul multigraduat finit generat peste inelul de polinoame intr-o multime finita de variabile, standard graduat, admite o descompunere Stanley al carei Stanley depth (sdepth) este marginit inferior de depth-ul modulului. Recent a fost demonstrat ca prima conjectura mentionata o implica de fapt pe a doua. Cele trei articole a caror descriere stiintifica o vom face in cele ce urmeaza au ca studiu de cercetare aceasta conjectura a lui Stanley. Inainte de a incepe descrierea propriu-zisa a acestor lucrari vom prezenta aceasta conjectura cu definitiile necesare intelegerii enuntului.

Fie $S = K[x_1, \dots, x_n]$ un inel de polinoame in n variabile peste un corp K si M un S -modul finit generat multigraduat (adica Z^n -graduate). Fie u un element omogen din M si Z o submultime (posibil vida) a multimii de variabile $\{x_1, \dots, x_n\}$. Vom nota cu $uK[Z]$ K -subspatiul vectorial al lui M generat de toate elementele de forma uv , cu v un monom din $K[Z]$. Un astfel de spatiu vectorial de forma $uK[Z]$ il vom numi *spatiu Stanley* de dimensiune $|Z|$, daca $uK[Z]$ este un $K[Z]$ -modul liber. O *descompunere Stanley* a lui M este o prezentare a K -spatiului vectorial M ca o suma directa finita de spatii Stanley in categoria K -spatiilor vectoriale multigraduate. Cu alte cuvinte, fiecare din sumanzii directe ai lui M este un K -subspatiu vectorial multigraduat al lui M si descompunerea este compatibila cu multigraduarea. Numarul $sdepth D = \min\{|Z_i| : i = 1, \dots, m\}$, unde m este numarul spatiilor Stanley din descompunerea D a lui M , se numeste *Stanley depth*-ul lui D . *Profunzimea Stanley* (Stanley depth-ul) lui M se defineste ca fiind

$$sdepth M := \max\{sdepth D : D \text{ este o descompunere Stanley a lui } M\}.$$

Prima conjectura mai sus mentionata poate fi scrisa acum

$$depth M \leq sdepth M, \text{ pentru orice } S\text{-modul } M \text{ multigraduat.}$$

Conjectura este deschisa in cazul general, dificultatea venind din faptul ca trebuie comparati doi invarianti: unul combinatorial cu unul omologic. Cu toate acestea in situatia speciala a modulelor de forma I/J , unde I si J sunt ideale monomiale au fost facute progrese remarcabile in ultimii 5 ani. De exemplu s-a aratat ca daca aceasta conjectura este valabila pentru toate idealele monomiale I astfel incat S/I este Cohen-Macaulay, atunci este valabila in general pentru orice modul de tipul S/I unde I este un ideal monomial. In cazul idealelor monomiale libere de patrute Dorin Popescu a demonstrat in lucrarea *An inequality between depth and Stanley depth*, publicata in 2009, ca aceasta conjectura a lui Stanley este adevarata daca $n \leq 5$.

De ce este important cazul idealelor monomiale libere de patrute? Pentru ca prin polarizare orice ideal monomial poate fi transformat intr-un ideal monomial liber de patrute. Prin acest functor polarizare, depth-ul unui ideal monomial creste cu unu la fiecare pas al polarizarii. Cu toate ca inca nu a fost inca demonstrata, totul conduce la convingerea ca si sdepth-ul unui ideal monomial se comporta in acelasi mod. Asta ar insemna ca demonstrarea conjecturii lui Stanley pentru ideale monomiale libere de patrute ar implica demonstrarea conjecturii lui Stanley in cazul general al idealelor monomiale. O posibila modalitate de demonstrare a acestei conjecturi in cazul idealelor monomiale libere de patrute ar fi prin inductie dupa numarul de ideale prime monomiale care apar in descompunerea primara a idealului. In acest sens Adrian Popescu a demonstrat in lucrarea *Special Stanley decompositions* publicata in 2010, ca idealele monomiale libere de patrute care se scriu ca intersectie de 3 ideale monomiale prime satisfac conjectura lui Stanley. In acest context vom prezenta rezultatele propriu zis ale lucrarilor realizate de membrii echipei de cercetare in cadrul proiectului.

Prima lucrare pe care o vom prezenta este *Stanley Conjecture On Intersections of four Monomial Prime Ideals*, scrisa de Dorin Popescu si care a fost trimisa spre publicare la Journal of Algebra. Se demonstreaza ca are loc Conjectura lui Stanley in cazul in care idealul monomial liber de patrute I se scrie ca intersectie de patru ideale prime monomiale (Teorema 2.3), sau daca nici un ideal prim din descompunerea primara a lui I nu este inclus in idealul generat de celelalte prime asociate (Teorema 4.2). Pentru a obtine aceste rezultate se obtin mai intai niste margini inferioare mai bune pentru sdepth I . Aceste relatii de marginire vor conduce in final la verificarea inegalitatii $sdepth I \geq depth I$.

Pentru inceput este extins conceptul de descompunere Stanley speciala, introdus intial de A. Popescu. Daca I admite o descompunere speciala, atunci in Teorema 1.5 se gaseste o margine inferioara pentru sdepth. Este introdus invariantul big-size $t(I)$ care reprezinta numarul minim e de ideale prime ce trebuie considerate astfel incit suma oricaror $e+1$ prime asociate lui I sa fie idealul maximal generat de variabile. Acest invariant este marginit inferior de size (I) , un alt invariant important introdus anterior de Lyubeznik.

Forma primelor asociate si unele proprietati combinatoriale ale acestora ne vor ajuta sa marginim sdepth si sa obtinem formule de calcul pentru depth (Lemma 2.1). Primul rezultat important este Teorema 2.3: pentru I intersectie de ideale prime monomiale in care nici un prim nu e inclus in suma celorlalti, are loc Conjectura Stanley. Sunt studiate proprietatile idealelor monomiale cu big size $t(I)$ egal cu 1 sau 2. In Lemele 3.2 si 3.3 obtinem o descriere detaliata a valorilor lui depth S/I , in functie de anumite proprietati combinatoriale ale primelor asociate lui I . Aceste doua leme sunt foarte tehnice, dar ele reprezinta piesa principala in demonstrarea Teoremei 4.2.: daca idealul I este intersectie redusa de patru ideale prime monomiale, atunci I verifica conjectura Stanley. Aceasta demonstratie face apel la multe rezultate si tehnici foarte recente ale cercetatorilor din domeniu, inclusiv ale autorului.

In incheiere sunt evidentiata problemele tehnice ce apar la ideale ce se scriu ca intersectie de mai mult de 4 prime monomiale. Este posibil ca unele dintre ele sa poata fi surmontate pe viitor. Iar acesta este un subiect de cercetare foarte fierbinte. A doua lucrare realizata in cadrul proiectului este *Bounds of Stanley Depth*, scrisa de Dorin Popescu si acceptata spre publicare in *Analele Univ. Ovidius*. Pentru a solutiona Conjectura Stanley este nevoie sa intelegem mai bine comportamentul sdepth. O serie de rezultate clasice sau foarte recente legate de comportamentul profunzimii (depth) isi gasesc analogul pentru sdepth. Astfel, sdepth S/I este majorat de $\dim S/P$, pentru oricare P ideal prim asociat lui I . De asemenea (Teorema 2), in cazul in care I ideal monomial, $sdepth(I:v) \geq sdepth I$, pentru orice monom v care nu este in idealul I . Rezultatul analog pentru depth a fost recent aratat de A. Rauf (2010). Este evidentiata rolul primelor asociate in marginirea sdepth. Pe cazuri particulare importante, rezultate recente ale lui Herzog, Ishaq, A.Popescu, D. Popescu, Qureshi, Vladoiu propun margini tot mai bune pentru sdepth. Ar fi util de stiut o relatie cit mai exacta intre sdepth I si sdepth S/I . Si aici rezultatele se obtin foarte greu. Teorema 20 trateaza cazul I ideal monomial intersectie de trei ideale prime generate de multimi variabile care nu se suprapun. Atunci, $sdepth I \geq sdepth S/I$. Mai mult, cu exceptia unor cazuri determinate complet de autor aici, are loc inegalitatea mai tare: $sdepth I \geq 1 + sdepth S/I$.

Al treilea articol realizat in cadrul proiectului este rodul unei colaborari intre doi membri ai proiectului si prof. J. Herzog (Germania), un renumit specialist in algebra comutativa. Este vorba de lucrarea *Stanley depth and size of a monomial ideal*, autori Juergen Herzog, Dorin Popescu si Marius Vladoiu.

Lyubeznik a demonstrat ca pentru un ideal monomial intr-o algebra de polinoame are loc $depth I \geq 1 + size I$. Presupunind adevarata conjectura Stanley ($sdepth I \geq depth I$), ar trebui ca $sdepth I \geq 1 + size I$. In articolul mentionat, este verificata aceasta inegalitate pentru cazul I ideal monomial liber de patrute. Datele experimentale sugereaza ca $sdepth S/I \geq I$. Dar chiar si in cazul squarefree aceasta inegalitate nu este o consecinta a inegalitatii $sdepth I \geq size I$, deoarece nu s-a putut demonstra inca daca $sdepth I \geq 1 + sdepth S/I$.

In prima sectiune a articolului este studiat un cocomplex G atasat unei multimi $\{J_1, \dots, J_s\}$ de ideale monomiale in S/I , cu I ideal monomial. In cazul $I=0$ sau idealele J_k sunt ideale monomiale ireductibile, se demonstreaza ca acest cocomplex este aciclic. In unele cazuri, G poate fi util la estimarea sau calcularea depth. In Teorema 1.2. este prezentat un criteriu pentru ca un ideal monomial sa aiba depth minimal, adica $depth I = 1 + size I$.

In Sectiunea 2 este descrisa metoda splitarii variabilelor introdusa de A. Popescu si generalizata de D. Popescu pentru ideale monomiale libere de patrute in articolul prezentat pe larg mai sus. Extinderi succesive la cazul idealelor monomiale arbitrare le permit autorilor (Teorema 3.1) sa verifice inegalitatea $sdepth I \geq 1 + size(I)$.

Este de asemenea studiat legatura intre regularitatea Stanley si cosize, si cum se pot obtine noi rezultate folosind dualitatea Alexander.

Al cincilea articol realizat in cadrul proiectului este *In Search of Structures: How Does the Mind Explore Infinity?*, autori C.Voica si M.Singer, publicat in revista *Mind, Brain, and Education*, Volume 4—Number 2, 81-93. Se determina patru tipuri de

structuri pe care subiectii le activeaza in momentul in care trebuie sa lucreze cu multimi infinite. Lucrarea are legatura cu domeniul inteligentei artificiale, deci cu programele de calculator.