Raport în extenso

Algebre Hopf, omologie ciclică şi categorii monoidale

Proiect Idei (Cod 69), contract nr. 560/2009
Director: prof. dr. Dragoş ŞTEFAN (Universitatea Bucureşti)

Rezultatele obţinute în vederea îndeplinirii obiectivelor pentru anul 2011 se găsesc în cele 6 articole elaborate în anul 2011 (la care se adaugă articolul: G. Bohm, **D. Ştefan**, *A categorical approach to cyclic duality*, acceptat pentru publicare în **Journal of Noncommutative Geometry**, raportat în anul 2010). Dintre acestea, două sunt deja acceptate pentru publicare în reviste cotate ISI, trei sunt trimise spre publicare, iar unul este în curs de redactare, după cum urmează:

A1. **Dragoş Ştefan**, Anca Stănescu, *Cleft comodule categories*, va apărea în **Communications in Algebra**.

A2. Aura Bârdeş, **Dragoş Ştefan**, *Factorizable enriched categories and applications*, va apărea în **Journal of Algebra**.

A3. **Andrei Chiteş**, **Mădălin Ciungu**, **Dragoş Ştefan**, *On De Rham cohomology of linear categories*, preprint.

A4. Gabriella Böhm, **Dragoş Ştefan**, *Homologies with Hopf bimodule coefficients*, în curs de redactare.

A5. **Florin Panaite**, **Mihai D. Staic**, *More examples of pseudosymmetric braided categories*, preprint.

A6. Helena Albuquerque, **Florin Panaite**, *Some (Hopf) algebraic properties of circulant matrices*, preprint.

Criteriul minim de performanţă aşteptat pentru anul 2011 era de două articole acceptate spre publicare în reviste cotate ISI. La articolele A1 şi A2 de mai sus se adaugă încă trei articole, care au fost raportate în 2010 ca preprinturi şi care între timp au fost acceptate pentru publicare, anume:

B1. **Florin Panaite**, *More examples of invariance under twisting*, va apărea în **Czechoslovak Mathematical Journal**.

B2. **Florin Panaite**, *Invariance under twisting for crossed products*, va apărea în **Proceedings of the American Mathematical Society**.

B3. **Mădălin Ciungu**, **Florin Panaite**, *L-R-smash products and L-R-twisted tensor products of algebras*, va apărea în **Algebra Colloquium**.

Aşadar, **considerăm că toate obiectivele au fost îndeplinite integral din punct de vedere ştiinţific**.

Menţionăm că, pe durata celor trei ani ai proiectului, au fost elaborate 20 de articole ştiinţifice, dintre care până în prezent au fost publicate sau acceptate pentru publicare 13 articole (toate în reviste ISI):

Articole ştiinţifice elaborate pe toată durata proiectului (2009-2011)

1. A. Makhlouf, D. Ştefan, *Coactions on Hochschild homology of Hopf-Galois extensions and their coinvariants*, **J. Pure Appl. Algebra** 214(9), 1654–1677 (2010).

2. M. D. Staic, *Symmetric cohomology of groups in low dimension*, **Arch. Math.** 93(3), 205–211 (2009).

3. F. Panaite, M. D. Staic, *A quotient of the braid group related to pseudosymmetric braided categories*, **Pacific J. Math.** 244(1), 155–167 (2010)

4. A. Chiteş, C. Chiteş, *Separable K-linear categories*, **Central European J. Math.** 8(2), 274–281 (2010).

5. P. Jara, J. Lopez, G. Navarro, D. Ştefan, *On the classification of twisting maps between K^n and K^m*, **Algebr. Represent. Theory** 14(5), 869–895 (2011).

6. M. D. Staic, V. Turaev, *Remarks on 2-dimensional HQFTs*, **Algebraic and Geometric Topology** 10(3), 1367–1393 (2010).

7. H. Albuquerque, F. Panaite, *Alternative twisted tensor products and Cayley algebras*, **Comm. Algebra** 39(2), 686–700 (2011).

8. G. Bohm, D. Ştefan, *A categorical approach to cyclic duality*, acceptat pentru publicare în **J. Noncommutative Geometry.**

9. D. Ştefan, A. Stănescu, *Cleft comodule categories*, acceptat pentru publicare în **Comm. Algebra.**

10. A. Bârdeş, D. Ştefan, *Factorizable enriched categories and applications*, acceptat pentru publicare în **J. Algebra.**

11. F. Panaite, *More examples of invariance under twisting*, acceptat pentru publicare în **Czech. Math. J.**

12. F. Panaite, *Invariance under twisting for crossed products*, acceptat pentru publicare în **Proc. Amer. Math. Soc.**

13. M. Ciungu, F. Panaite, *L-R-smash products and L-R-twisted tensor products of algebras*, acceptat pentru publicare în **Algebra Colloq.**

14. M. D. Staic, *Secondary cohomology and k-invariants.*

15. P. Jara, J. Lopez, D. Stefan, *On the Koszulity of twisted tensor products of algebras.*

16. M. D. Staic, *An explicit description of the simplicial group $K(A, n)$.*

17. A. Chiteş, M. Ciungu, D. Ştefan, *On De Rham cohomology of linear categories.*

18. G. Bohm, D. Ştefan, *Homologies with Hopf bimodule coefficients.*

19. F. Panaite, M. D. Staic, *More examples of pseudosymmetric braided categories.*

20. H. Albuquerque, F. Panaite, *Some (Hopf) algebraic properties of circulant matrices.*

Prezentăm acum cele mai importante rezultate ştiinţifice obtinute în 2011:

Articolul A1

Categoriile liniare au fost introduse de Barry Mitchell sub numele de algebre cu mai multe obiecte, într-un articol de referinţă, publicat în 1972 în Advances in Mathematics. Definiţia categoriilor liniare este foarte asemănătoare cu aceea a categoriilor obişnuite numai că pentru primele mulţimea morfismelor dintre două obiecte arbitrare are o structură de modul peste un inel comutativ dat, iar aplicaţiile de compunere sunt biliniare. Proprietăţile lor de bază au fost studiate tot de Barry Mitchell în articolul mai sus menţionat, unde printre altele se definesc modulele stângi (sau drepte) peste categorii liniare şi se arată că acestea păstrează toate caracteristicile modulelor unei algebre asociative.

Categoriile liniare s-au dovedit foarte utile în studiul reprezentărilor unor structuri algebrice, cum ar fi grafurile orientate cu un număr infinit de vârfuri. Pentru un astfel de graf categoria reprezentărilor sale se identifică cu o categorie de module peste o anumită categorie liniară, şi nu cu o categorie de module peste o algebră asociativă şi unitară. Alte exemple remarcabile de categorii liniare provin din topologia algebrică şi din fizică.

În anii '80 Pierre Gabriel, pornind de la studiul reprezentărilor algebrelor asociative, a definit acoperirea Galois a unei categorii liniare. Prin definiţie aceasta este tot o categorie liniară pe care un anumit grup, numit Galois, acţionează liber. Rezultatele obţinute de Gabriel au atras atenţia asupra acţiunilor grupurilor pe categorii liniare. Claude Cibils şi Andrea Solotar în 2005 au introdus produsul smash dintre o categorie liniară şi un grup finit. Ei au arătat de asemenea că o acoperire Galois coincide până la o echivalenţă Morita cu un astfel de produs smash. Problematica de mai sus a condus de asemenea la apariţia categoriilor liniare G-graduate. Legătura acestora cu acoperirile Galois este dată de o generalizare a bine-cunoscutei teoreme de dualitate demonstrată de Cohen şi Montgomery.

Mai general, acţiunile şi coacţiunile unei algebre Hopf pe o categorie liniară au fost considerate de E. Herscovich şi A. Solotar pentru a asocia un şir spectral de tip Lyndon-Hochschild-Serre în coomologia Hochschild-Mitchell a unei categorii liniare. Ingredientul principal folosit în construcţia şirului spectral este noţiunea de extindere Hopf-Galois de categorii liniare.

Rezultatele şi aplicaţiile prezentate justifică pe deplin interesul crescând pentru studiul acţiunilor şi coacţiunilor algebrelor Hopf pe categorii liniare, şi în mod special al extinderilor Hopf-Galois de categorii liniare. Scopul articolului pe care îl discutăm este de a construi noi exemple de extinderi H-Galois de categorii liniare (şi de a analiza proprietăţile lor) folosind tehnici provenind din teoria extinderilor cleft de algebre. Este bineştiut că acestea sunt deformări cu ajutorul unui 2-cociclu ale unui produs smash, deci pot fi privite ca generalizări ale unei clase importante de produse twistate, şi anume cele smash.

Fiind dată o categorie liniară $\mathcal{D}$ şi o algebră Hopf H se defineşte o nouă categorie liniară cu ajutorul a două familii de aplicaţii liniare care joacă rolul de 2-cociclu şi respectiv de acţiune slabă a lui H pe $\mathcal{D}$. Aceasta se numeşte categoria produs încrucişat $\mathcal{D}\#_\sigma H$. Prin construcţie orice categorie produs încrucişat este o H-comodul categorie. În Teorema 3.1.9 se arată că o H-comodul categorie este izomorfă cu o categorie produs încrucişat cu 2-cociclu inversabil în convoluţie, dacă şi numai dacă este cleft, adică admite o integrală totală inversabilă în convoluţie. Ca o consecinţă a acestei caracterizări se deduce că o H-comodul categorie este un produs smash dacă şi numai dacă există o integrală totală ale cărei componente sunt morfisme de algebră.

Cu ajutorul H-comodul categoriilor cleft, se demonstrează că o categorie produs încrucişat cu cociclu inversabil este o extindere Hopf-Galois care are o bază normală, şi reciproc. Ca şi în cazul clasic, modulele Hopf peste o H-comodul categorie $\mathcal{C}$ sunt $\mathcal{C}$-module drepte pe care H coacţionează într-un mod compatibil. Structura modulelor Hopf, în cazul în care $\mathcal{C}$ este o H-comodul categorie cleft, este descrisă în Teorema 3.2.5. Categoria modulelor Hopf este izomorfă cu categoria $\mathcal{D}$-modulelor drepte, unde $\mathcal{D}$ este subcategoria morfismelor H-coinvariante.

În ultima parte a acestui articol sunt prezentate o serie de exemple, incluzând construcţia unei H-comodul categorii cleft universale, pentru orice algebră Hopf cocomutativă H şi orice mulţime S.

Articolul A2

Factorizarea structurilor algebrice este o problemă veche, care îşi are originile într-un articol al lui E. Maillet din 1900. În această lucrare, presupunând că se dă un grup G, se studiază existenţa subgrupurilor H şi K astfel încât $G = HK$ şi $H \cap K = \{1\}$. În cazul în care există o pereche de subgrupuri H şi K, cu proprietăţile de mai sus, se spune că G factorizează prin H şi K. Dacă G factorizează prin H şi K, structura sa este complet determinată de cele două grupuri, împreună cu câte o acţiune a unuia pe celălalt. În limbaj modern, se spune că dacă G factorizează prin

G şi H atunci (H, K) este o pereche potrivită (matched pair) de grupuri. Reciproc, pentru orice pereche potrivită de grupuri (H, K) există un grpup $H \bowtie K$, produsul lor dublu încrucişat, care factorizează prin H şi K.

Problema menţionată mai sus are sens nu numai pentru grupuri, cât şi pentru numeroase alte structuri algebrice. Spre exemplu, o algebră asociativă şi unitară A se spune că factorizează prin două subalgebre ale sale B şi C, dacă morfismul canonic de la $B \otimes C$ la A indus de multiplicarea de pe A este un izomorfism. Similar poate fi formulată problema factorizării pentru coalgebre, bialgebre şi algebre Hopf, monade şi bimonade etc. În fiecare caz în parte, problema conduce la construcţia unui "produs" dintre două structuri algebrice, cum ar fi, spre exemplu, produsul twistat de algebre şi coalgebre, sau produsul dublu încrucişat de bialgebre. Deşi aceste "produse" sunt diferite prin natura lor şi au fost obţinute cu metode ad-hoc, depinzând de structura algebrică cu care se lucrează, construcţia acestora este totuşi destul de asemănătoare. Această observaţie sugerează posibilitatea unei abordări unificatoare, cu ajutorul căreia să se obţină un "produs tensorial twistat generalizat", şi care înglobează "produsele" deja cunoscute. În acest fel am ajuns la studiul categoriilor îmbogăţite care factorizează prin două subcategorii ale sale.

Categoriile îmbogăţite într-o categorie monoidală $\mathcal{M}$, sau $\mathcal{M}$-categoriile pe scurt, sunt generalizări ale categoriilor obişnuite în care mulţimea morfismelor dintre două obiecte date este înlocuită cu un obiect din $\mathcal{M}$. Pentru a putea formula problema factorizării unei $\mathcal{M}$-categorii $\mathcal{C}$ prin doua $\mathcal{M}$-subategorii ale sale $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt necesare câteva ipoteze suplimentare pe care fie $\mathcal{M}$ fie $\mathcal{C}$ trebuie să le îndeplinească. Fǎra a intra în detalii tehnice, dacă în $\mathcal{M}$ există suficiente sume directe şi acestea comută cu produsul tensorial, iar $\mathcal{C}$ este mică, atunci $\mathcal{M}$-subcategoriilor $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ li se asociază în mod canonic o familie de morfisme în $\mathcal{M}$. În cazul în care aceste morfisme sunt toate inversabile se spune că $\mathcal{M}$-categoria $\mathcal{C}$ factorizează prin $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$.

Rezultatele obţinute în această direcţie sunt următoarele. Prin analogie cu cazul algebrelor asociative factorizabile se arată că orice $\mathcal{M}$-categorie factorizabilă $\mathcal{C}$ induce un sistem de twistare:

În continuare este investigată problema reciprocă: se poate asocia unui sistem de twistare dintre două $\mathcal{M}$-categorii $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ o categorie care să le conţină ca subcategorii şi să factorizeze prin acestea? În general, răspunsul este probabil negativ. Totuşi pentru o clasă specială de sisteme de twistare, numite sisteme simple, această construcţie este posibilă, iar $\mathcal{M}$-categoria care se obţine generalizează produsul tensorial twistat a două algebre (conform Teoremei 2.14).

Ca o primă aplicaţie a celor două teoreme menţionate mai sus sunt caracterizate sistemele twistate simple, precum şi categoriile îmbogăţite care le corespund, în cazul în care categoria monoidală $\mathcal{M}$ coincide cu categoria de coalgebre într-o categorie braided dată. În această situaţie sistemele de twistare simple sunt în corespondenţă bijectivă cu perechile potrivite de $\mathcal{M}$-categorii (Teorema 3.5). Categoria îmbogăţită care corespunde unei perechi potrivite se numeşte produsul dublu încrucişat. Dacă spre exemplu se lucrează cu $\mathcal{M}$-categorii cu un singur obiect atunci acestea sunt de fapt bialgebre, iar cu ajutorul rezultatului de mai sus regăsim perechile potrivite de bialgebre şi produsul dublu încrucişat al acestora, studiate de S. Majid şi de alţii.

Particularizând categoria monoidală $\mathcal{M}$ sunt deduse noi aplicaţii ale construcţiilor precedente. Spre exemplu, daca se lucrează cu categorii cu un singur obiect, adică cu monoizi într-o categorie monoidală $\mathcal{M}$, se regăsesc construcţii bine-cunoscute, incluzând aplicaţiile de twistare între două algebre, legile de distributivitate între două monade, sau legile de distributivitate opmonoidale.

Sunt de asemenea obţinute noi aplicaţii ale rezultatelor noastre, în cazul unor structuri algebrice pentru care problema factorizării nu a fost studiată anterior. Spre exemplu, dacă $\mathcal{M}$ este categoria mulţimilor, atunci $\mathcal{M}$-categoriile coincid cu categoriile obişnuite. În acest caz un sistem de twistare simplu se identifică cu o pereche potrivită, deci se poate considera produsul său dublu încrucişat. Acesta este un grupoid atunci când cele două categorii au această proprietate (reamintim că un grupoid este o categorie în care care toate morfismele sunt izomorfisme). Pentru anumite tipuri speciale de categorii, cum ar fi cele asociate mulţimilor parţial ordonate, sunt determinate toate sistemele de twistare în funcţie de anumite date combinatoriale.

Articolul A3

Trecerea de la geometria comutativă la aceea necomutativă a fost realizată de Alain Connes arătând că numeroase proprietăţi geometrice ale unei varietăţi pot fi rescrise ca proprietăţi algebrice ale inelului de funcţii definite pe acea varietate. Unul dintre exemplele cele mai concludente în acest sens îl reprezintă construcţia claselor Chern în context necomutativ. Acestea reprezintă importanţi invarianţi omologici ce fac legătura între $K_0(A)$, grupul de K-teorie al unei algebre (peste un corp de caracteristică zero $\Bbbk$), şi coomologia De Rham $H^*_{DR}(A)$ a acelei algebre.

În acest articol se arată că o construcţie asemănătoare poate fi realizată şi pentru categorii liniare, care după cum am remarcat deja reprezintă generalizări naturale ale algebrelor. Ca motivaţie principală se are în vedere faptul că definiţia claselor Chern se obţine automat pentru toate algebrele neunitare cu suficient de multe elemente idempotente, cum ar fi spre exemplu algebra asociată unui graf orientat cu un număr infinit de vârfuri.

În prima parte a articolului sunt explicate pe scurt rezultatele preliminare necesare privind proprietăţile modulelor peste o categorie $\Bbbk$-liniară $\mathcal{C}$, şi în mod special ale celor proiective şi finit generate, subliniind importanţa bazelor duale în studiul celor din urmă. În partea centrală a articolului se arată mai întâi că, pentru o categorie $\Bbbk$-liniară $\mathcal{C}$ se poate defini o DG-categorie universală $\Omega^*\mathcal{C}$, ale cărei morfisme de grad n pot fi privite ca forme diferenţiale de grad n pe $\mathcal{C}$. Fiind dată o DG-categorie arbitrară Ω^* astfel încât $\Omega^0 = \mathcal{C}$ se defineşte Ω^n_{ab} ca fiind spaţiul cât al sumei directe $\oplus_x\, {}_x\Omega^n_x$ modulo subspaţiul generat de comutatorii graduaţi $\omega_1 \circ \omega_2 - (-1)^{pq}\omega_2 \circ \omega_1$, unde ${}_x\Omega^n_y$ reprezintă spaţiul formelor de grad n de la y la x, iar $\omega_1 \in {}_x\Omega^p_y$ şi $\omega_2 \in {}_y\Omega^q_x$, cu $p + q = n$. Diferenţiala categoriei Ω^* induce morfisme $d^n_{ab} : \Omega^n_{ab} \to \Omega^{n+1}_{ab}$ astfel încât $(\Omega^*_{ab}, d^*_{ab})$ este un complex, a cărui coomologie se numeşte coomologia De Rham a lui $\mathcal{C}$, şi se notează cu $H^*_{DR}(\Omega^*)$.

Fiind dat un $\mathcal{C}$-modul proiectiv M şi o DG-categorie Ω^* ca mai sus, se defineşte noţiunea de conexiune pe M cu ajutorul unei familii de aplicaţii $\Bbbk$-liniare $\nabla_x : M_x \to (M \otimes_{\mathcal{C}} \Omega^*)_x$ care satisfac regula lui Leibniz. În cazul în care M este proiectiv şi finit generat se arată folosind existenţa bazelor duale că pe M există totdeauna cel puţin o conexiune, purtând numele de conexiunea Levi-Civita. De asemenea, sunt descrise toate conexiunile care pot fi definite pe un modul liber finit generat $\oplus_{i=1}^{n}{}_{x_i}\mathcal{C}_\bullet$. Orice conexiune poate fi extinsă în mod unic la un endomorfism $\widetilde{\nabla}$ omogen de grad 2 al Ω^*-modulului $M \otimes_{\mathcal{C}} \Omega^*$. Se poate acum defini clasa Chern $Ch_q(M, \nabla)$ ca fiind clasa de coomologie De Rham a urmei endomorfismului obţinut compunând pe $\widetilde{\nabla}$ cu el însuşi de q-ori. Prin construcţie, $Ch_q(M, \nabla) \in H^{2q}_{DR}(\Omega^*)$.

În cazul conexiunii Levi-Civita, sau al unei conexiuni pe un modul liber, clasele Chern pot fi calculate cu ajutorul bazelor duale pe M. Pentru a arăta că definiţia claselor Chern nu depinde de algerea unei conexiuni pe M, se foloseşte calculul menţionat mai sus, împreună cu o lemă care, într-un anumit sens, ne arată că diferenţa dintre două elemente ale unei "familii algebrice depinzând de un parametru" de cocicli De Rham este un cobord.

Articolul A4

În acest articol se continuă studiul omologiei Hopf-ciclice (duale) utilizând ca principal instrument de lucru teoria complexelor mixte. Se ştie că oricărui obiect ciclic $Z := (C_*, d_*, s_*, t_*)$ într-o categorie abeliană îi corespunde un anumit complex mixt $X := (C_*, b_*, B_*)$. Prin definiţie, (C_*, b_*) este un complex de lanţuri şi (C_*, B_*) este un complex de colanţuri, astfel încât operatorii b_* şi B_* comută. Atât omologia Hochschild cât şi cea ciclică a obiectului Z pot fi recuperate din omologia complexului (C_*, b_*) şi, respectiv, cea a complexului total asociat lui X.

Unul dintre obiectivele principale ale acestui articol este de a descrie complexul mixt care corespunde obiectului ciclic $C_*(H, M)$ construit de Jara şi Ştefan pentru orice algebră Hopf H şi orice SAYD-modul M. Cu alte cuvinte, în acest caz particular, se urmăreşte mai întâi calculul operatorilor b_* şi B_*. În general, pentru un obiect ciclic arbitrar $Z = (C_*, d_*, s_*, t_*)$, determinarea lui b_* este mai simplă. În schimb, pentru a simplifica formula operatorului B_*, se trece la complexul mixt normalizat $\overline{X}$, care se obţine din X factorizând C_* prin suma imaginilor operatorilor de faţă s_*. Să observăm că $\overline{X}$ are aceeaşi omologie Hochschild şi aceeaşi omolgie ciclică ca şi X, deci implicit ca şi Z. În particular, dacă se ia $Z = C_*(H, M)$, atunci descrierea explicită a complexului mixt normalizat corespunzător $\overline{X}$ poate fi utilizată pentru calculul omologiei Hopf-ciclice duale $HC_*(H, M)$.

Factorizând mai departe complexul normalizat prin ultima aplicaţie de faţă se obţine un nou obiect ciclic, care se numeşte obiectul ciclic redus. Are deci sens să vorbim de omologia ciclică a acestuia, care poarta numele de omologia ciclică redusă. În particular putem deci considera omologia ciclică redusă a lui $C_*(H, M)$, notată în continuare prin $HC_*^{red}(H, M)$. În cea de a doua parte a articolului sunt investigate proprietăţile acestei omologii în următoarea situaţie particulară. Se fixează o extindere H-Galois $R \subseteq A$ şi un modul Hopf N. Este uşor de văzut că $M := N/[R, N]$, spaţiul factor al lui N prin comutatorii $[R, N]$ este un AYD-modul. Presupunem că N este astfel ales încât M este şi stabil, adică el este chiar un SAYD-modul. În aceste ipoteze se construieşte un anumit bimodul diferenţial peste o anumită DG-algebră. Cu ajutorul acestora se defineşte $H^*_{DR}(H, M)$, omologia De Rham a lui H cu coeficienţi în M. Se arată apoi că operatorul B_*, calculat în prima parte a articolului, induce o aplicaţie $B_* : HC_*^{red}(H, M) \longrightarrow HH_*(H, M)$. În rezultatul central al lucrării se demonstrează că următorul şir este exact

$$0 \longrightarrow H^*_{DR}(H, M) \longrightarrow HC_*^{red}(H, M) \xrightarrow{B_*} HH_*(H, M),$$

sau altfel spus, nucleul lui B_* este $H_*^{DR}(H, M)$. Un exemplu de bimodul Hopf N care satisface toate proprietăţile necesare este A. În acest caz operatorul B_* este definit pe $HC_*^{red}(A)$, omologia ciclică redusă a algebrei A şi ia valori în omologia Hochschild a acestei algebre. Deci, ca un corolar, se obţine o identificare între omologia De Rham relativă a lui A şi $H^*_{DR}(H, A_B)$.

Articolul A5

Conceptul de braiding pseudosimetric a fost introdus ca o generalizare a braidingurilor simetrice. Un braiding c într-o categorie monoidala este pseudosimetric daca satisface un fel de relaţie braid modificată. Există de asemenea un analog Hopf al acestui concept: o structură quasitriangulară pe o algebră Hopf se numeşte pseudotriangulară daca satisface un fel de ecuaţie Yang-Baxter modificată. În acest articol sunt analizate câteva clase de categorii braided şi structuri quasitriangulare cu scopul de a le identifica pe cele care sunt pseudosimetrice (respectiv pseudotriangulare):

(i) Fie H o algebră Hopf cu antipod bijectiv. Un bimodul Yetter-Drinfeld-Long peste H este un spaţiu vectorial M înzestrat cu structuri de H-bimodul şi H-bicomodul astfel încât M devine un modul Yetter-Drinfeld stânga-stânga şi dreapta-dreapta şi un modul Long stânga-dreapta şi dreapta-stânga. Aceste obiecte formează o categorie, care devine în plus categorie monoidală şi care are un braiding canonic. Se demonstrează că acest braiding este pseudosimetric dacă şi numai dacă H este comutativă şi cocomutativă.

(ii) Fie ν un număr natural impar şi presupunem că în corpul de bază k există o rădăcină primitivă de ordin 2ν a unităţii . Notăm cu H_ν algebra Hopf peste k generată de două elemente g şi x cu relaţiile $g^{2\nu} = 1$, $gx + xg = 0$ şi $x^2 = 0$, şi comultiplicarea $\Delta(g) = g \otimes g$ şi $\Delta(x) = x \otimes g^\nu + 1 \otimes x$. Această clasă de algebre Hopf a fost introdusă de către Radford, care a clasificat şi structurile quasitriangulare pe H_ν, astfel: ele sunt parametrizate de perechi (s, β), unde $\beta \in k$ iar s este un număr natural impar cu $1 \leq s < 2\nu$. Dacă notăm cu $R_{s,\beta}$ structura quasitriangulară corespunzătoare perechii (s, β), Radford a arătat că $R_{s,\beta}$ este triangulară dacă şi numai

dacă $s = \nu$. Noi demonstrăm în articol că toate structurile quasitriangulare $R_{s,\beta}$ sunt pseudotriangulare.
(iii) O algebră Hopf H peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe are o bază pozitivă dacă există o bază în H astfel încât toate constantele de structură ale lui H în baza respectivă sunt numere reale nenegative, iar o structură quasitriangulară pe o astfel de algebră Hopf se numeşte pozitivă dacă toţi coeficienţii ei in baza $B \otimes B$ (unde B este o bază pozitivă) sunt numere reale nenegative. Algebrele Hopf finit dimensionale cu baze pozitive si structurile quasitriangulare pozitive pe ele au fost clasificate de către Lu, Yan şi Zhu. O astfel de algebră Hopf (notată $H(G; G_+, G_-)$) este construită pornind cu un grup finit G şi o factorizare a acestuia $G = G_+G_-$, unde G_+ şi G_- sunt subgrupuri ale lui G. O structură quasitriangulară pozitivă pe $H(G; G_+, G_-)$ este dată de două morfisme de grupuri $\xi, \eta : G_+ \to G_-$ satisfăcând anumite condiţii (notăm $R(\xi, \eta)$ structura quasitriangulară corespunzătoare). Lu, Yan şi Zhu au demonstrat că $R(\xi, \eta)$ este triangulară dacă şi numai dacă $\xi = \eta$. În articol am prezentat o listă de condiţii necesare şi suficiente pentru ca $R(\xi, \eta)$ să fie pseudotriangulară. Aceste condiţii arată destul de complicat în general, dar se simplifică mult într-un caz particular, anume când morfismul ξ este trivial (în aceste condiţii structura quasitriangulară $R(\xi, \eta)$ se numeşte normală). Anume, am demonstrat că o structură quasitriangulară pozitivă normală $R(\xi, \eta)$ este pseudotriangulară dacă şi numai dacă $\eta(uv) = \eta(vu)$, pentru orice $u, v \in G_+$.

Articolul A6

În acest articol sunt analizate anumite proprietăţi algebrice şi Hopf-algebrice ale matricelor circulante, inspirate de faptul că algebra matricelor circulante de ordin n este izomorfă cu algebra grupală a grupului ciclic cu n elemente.

Fie H o algebră Hopf finit dimensională. Notăm cu $\rightharpoonup$ acţiunea regulată a lui H pe H^*. Se ştie că H^* devine o H-modul algebră cu această acţiune, deci putem considera produsul smash $H^*\#H$, despre care se ştie că este izomorf ca algebră cu $End(H^*)$, un izomorfism explicit fiind definit prin $\lambda : H^*\#H \simeq End(H^*)$, $\lambda(\varphi\#h)(\psi) = \varphi * (h \rightharpoonup \psi)$. În particular, restricţiile lui λ la H^* şi H definesc scufundări ale lui H^* şi H în $End(H^*)$ (ca algebre). Dacă identificăm $End(H^*)$ cu $M_n(\mathbb{K})$, unde $n = dim(H)$ iar $\mathbb{K}$ este corpul de bază, obţinem scufundări de algebre ale lui H şi H^* in $M_n(\mathbb{K})$. În cazul în care $H = \mathbb{K}\mathbb{Z}_n$, algebra grupală a grupului ciclic cu n elemente, atunci imaginea lui $(\mathbb{K}\mathbb{Z}_n)^*$ în $M_n(\mathbb{K})$ via scufundarea de mai sus este algebra $D^n_{\mathbb{K}}$ a matricelor diagonale de ordin n, iar imaginea lui $\mathbb{K}\mathbb{Z}_n$ în $M_n(\mathbb{K})$ este algebra $C^n_{\mathbb{K}}$ a matricelor circulante de ordin n. În particular, ca o consecinţă a faptului ca produsul smash este un exemplu de produs tensorial twistat, se obţine că algebra matricelor de ordin n factorizează drept $M_n(\mathbb{K}) = D^n_{\mathbb{K}} C^n_{\mathbb{K}}$.

Întrucât algebra grupală $\mathbb{K}\mathbb{Z}_n$ este o algebră Hopf, algebra $C^n_{\mathbb{K}}$ a matricelor circulante de ordin n devine şi ea o algebră Hopf via izomorfismul de mai sus. Se analizează structura Hopf indusă, de exemplu antipodul aplicat unei matrice coincide cu transpusa matricei. Comultiplicarea Δ arată mai complicat, totuşi se demonstrează că dacă C este o matrice circulantă de ordin n atunci $\Delta(C)$, privită ca o matrice de ordin n^2, este ceea ce se numeşte "block circulant with circulant blocks". Sunt prezentate de asemenea câteva fapte (şi exemple) privind anumite latice în algebra matricelor circulante.

În ultima secţiune a articolului se introduce o clasă de matrice circulante generalizate, astfel. Notăm elementele lui $\mathbb{Z}_n$ cu $e_1 = 1, e_2, ..., e_n$; pentru o aplicaţie dată $\mu : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^*$, cu $\mu(e_1) = 1$, notăm $\mu(e_i) = \mu_i$ pentru orice $i \in \{2, ..., n\}$. Pentru $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$, notăm $circ(c_1, ..., c_n; \mu_2, ..., \mu_n)$ matricea de ordin n cu $c_1, c_2, ..., c_n$ în prima linie, c_1 pe diagonala principală şi intrare $c_{j-i+1}\frac{\mu_i \mu_{j-i+1}}{\mu_j}$ în orice altă poziţie (i, j). Aceste matrice $circ(c_1, ..., c_n; \mu_2, ..., \mu_n)$ generalizează matricele circulante obişnuite. Ele formează o algebră, notată $C^n_{\mathbb{C}}(\mu)$, care este izomorfă cu algebra grupală twistată cu 2-cociclu indus de μ. Un rezultat general spune ca această algebră grupală twistată este izomorfă cu algebră grupală obişnuită, deci $C^n_{\mathbb{C}}(\mu)$ este izomorfă cu algebra matricelor circulante de ordin n. Dar aceste matrice generalizează nu numai matricele circulante, ci şi pe cele strâmb circulante: într-adevăr, o matrice strâmb circulantă $scirc(c_1, ..., c_n)$ se dovedeşte a fi $circ(c_1, ..., c_n; \sigma, \sigma^2, ..., \sigma^{n-1})$, unde $\sigma = cos(\frac{\pi}{n}) + isin(\frac{\pi}{n})$. Mai mult, pentru o matrice $circ(c_1, ..., c_n; \mu_2, ..., \mu_n)$ se pot determina formule explicite pentru valorile şi vectorii lor proprii, ce pot fi citite direct din intrările matricei şi care le generalizează pe cele pentru matrice circulante şi strâmb circulante.

Stagii de documentare şi cercetare

Cu finanţare din fondurile proiectului, **Dragoş Ştefan** a efectuat următoarele stagii de documentare şi cercetare: Universitatea din Granada (29 mai-11 iunie), Institutul de Fizică Nucleară din Budapesta (9-19 octombrie) şi University College of London (14-26 noiembrie). În timpul deplasărilor la Granada şi Londra s-a continuat colaborarea ştiinţifică cu P. Jara-Martinez şi, respectiv, J. Lopez Peña privind proprietăţile algebrelor Koszul, cu aplicaţii la calculul (co)omologiei Hochschild acestor algebre. În particular au fost obţinute rezultate privind (co)omologia Hochschild a unui produs tentorial twistat de algebre Koszul, incluzând spaţiile afine cuantice şi extinderile Ore generalizate ale algebrelor Koszul. La Budapesta, în colaborare cu Gabriella Böhm, s-a definit o nouă teorie de omogie pentru algebrele Hopf, de tip De Rham, cu coeficienţi în categoria bimodulele Hopf, şi s-a studiat legătura acesteia cu omologia Hopf-ciclică. Rezultatele obţinute sunt în curs de redactare, acum fiind disponibil doar un preprint în formă preliminară (a se vedea A4, din lista de articole raportate).

Florin Panaite a efectuat două stagii de cercetare la Universitatea din Coimbra, Portugalia (4 săptămâni în iulie şi 2 săptămâni în septembrie-octombrie). În cursul acestor două stagii a fost demarat, respectiv încheiat, lucrul la un proiect de cercetare, împreună cu Prof. Helena Albuquerque de la Universitatea din Coimbra, privind anumite proprietăţi algebrice ale matricelor circulante. Cercetările efectuate au fost concretizate în articolul “Some (Hopf) algebraic properties of circulant matrices” descris anterior.

Participări la congrese internaţionale

Dragoş Ştefan a participat, în perioada 29 Iunie - 5 Iulie, la “The 7-th Congress of Romanian Mathematicians”, în calitate de co-organizator.

Dragoş Ştefan şi **Florin Panaite** au participat, în perioada 25-29 iulie, la congresul internaţional “Non-Associative Algebras and Related Topics”, desfăşurat la Universitatea din Coimbra, Portugalia. În cadrul acestui congres, Florin Panaite a susţinut o conferinţă cu titlul “Alternative twisted tensor products and Cayley algebras”.

Dragoş Ştefan, **Florin Panaite**, **Andrei Chiteş** şi **Mădălin Ciungu** au participat, în perioada 24-26 octombrie, la congresul internaţional “Algebra, Geometry and Mathematical Physics”, desfăşurat la Universitatea din Mulhouse, Franţa, în cadrul căruia au susţinut următoarele conferinţe:

Dragoş Ştefan: On the Hochschild homology of Hopf-Galois extensions
Florin Panaite: Pseudosymmetric braided monoidal categories.
Andrei Chiteş: Separable K-linear categories.
Mădălin Ciungu: L-R-twisted tensor products of algebras.

Menţionăm că toate aceste conferinţe susţinute de membrii proiectului au fost bazate pe rezultate obţinute în cadrul acestui proiect şi au contribuit la o mai bună diseminare a acestor rezultate.